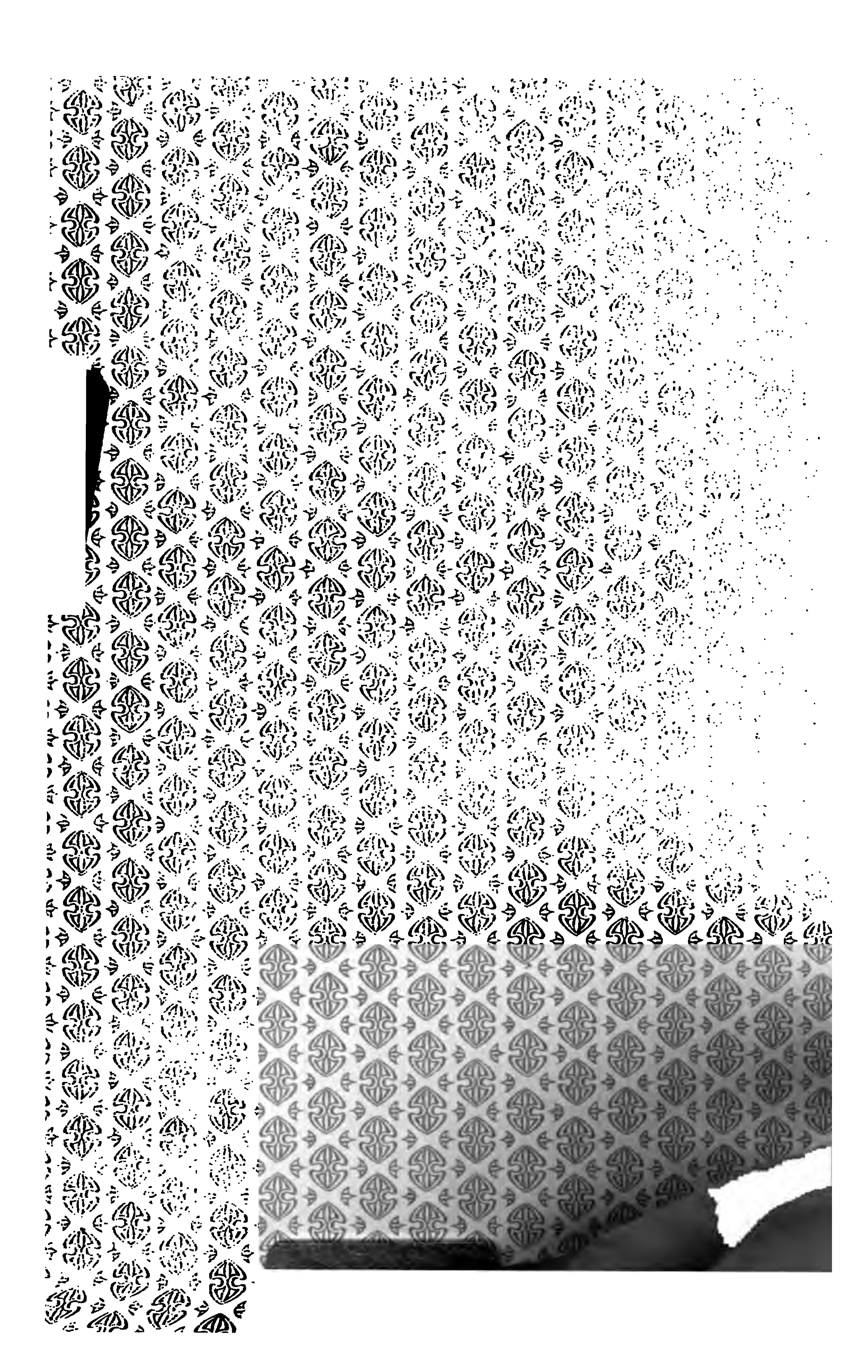
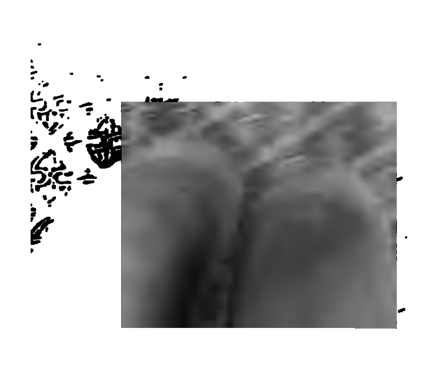








THEORIE

DER

BEOBACHTUNGSFEHLER.

VON

EMANUEL CZUBER.

MIT 7 IN DEN TEXT GEDRUCKTEN FIGUREN.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1891.

Vorwort.

Wenn auf einem Gebiete, das einer ausgedehnten Litteratur sich erfreut, ein neues Buch erscheint, so bedarf dasselbe eines Begleitwortes, welches seine Stellung in der bezüglichen Litteratur kennzeichnet. Dies trifft im vorliegenden Falle zu; denn die Theorie der Beobachtungsfehler und die darauf gegründete Methode der kleinsten Quadrate haben, obwohl zu den jüngeren Zweigen der angewandten Mathematik zählend, bereits eine ansehnliche Reihe von Arbeiten zu Tage gefördert. Konnte doch Mansfield Merriman 1877 in seiner „List of Writings relating to the Method of Least Squares" 408 Titel anführen, und noch war dieses Verzeichnis nicht vollständig und hat seither gewiss eine namhafte Erweiterung erfahren.

Zwei Gründe können für diese eifrige Pflege des Gegenstandes angeführt werden. Einmal ist es seine Metaphysik, welche immer wieder anregend wirkt und ihm das thätige Interesse der hervorragendsten Geometer zugeführt hat. Dazu kommt die grosse praktische Bedeutung, die womöglich noch im Wachsen begriffen ist; denn kaum wird man, auf welchem Gebiete der messenden Disziplinen immer, in unseren Tagen Resultate aus Beobachtungen ableiten, die nicht vorher einer fehlertheoretischen Untersuchung und einer Ausgleichung unterworfen worden sind zu dem Zwecke, um ihr Ergebnis zu verschärfen und den Grad seiner Zuverlässigkeit festzustellen.

Zweck des vorliegenden Buches ist es nun, ein möglichst umfassendes und zusammenhängendes Bild der wissenschaftlichen Grundlagen der Fehlertheorie und ihrer Entwicklung zu geben. Damit ist auch schon gesagt, dass das umfangreiche und mannigfaltige Gebiet der Anwendungen

sowie auch dasjenige, was nur auf die praktische Ausführung der einschlägigen Rechnungen sich bezieht, von dem Inhalte ausgeschlossen ist. In dieser Form hat das Buch, wie ich glaube, eine Berechtigung, weil ihm ähnliche Schriften gleichen Umfanges nicht gegenüberstehen, und eine zweifache Bestimmung: es dürfte geeignet sein diejenigen in den Gegenstand einzuführen, welche ihm der metaphysischen oder der rein mathematischen Seite wegen ihre Aufmerksamkeit zuwenden, und dem Bedürfnis derjenigen entgegenkommen, welche mit praktischen Anwendungen der Fehlertheorie vielfach beschäftigt sich mit ihren wissenschaftlichen Grundlagen eingehender bekannt machen wollen, als dies an der Hand eines praktische Ziele verfolgenden Werkes möglich ist.

Der Schwierigkeiten, welche sich der Lösung einer Aufgabe wie die eben bezeichnete entgegenstellen und in der Materie selbst sowie in der ausgebreiteten Litteratur ihren Grund haben, war ich mir bewusst und muss es berufenen Fachmännern überlassen, zu urteilen, wie weit sie mir gelungen ist.

Durch den Plan der Arbeit war es geboten, der historischen Seite Rechnung zu tragen; ich habe dies durch Anordnung des Stoffes wie auch durch litterar-historische Noten zu erreichen gesucht, von welch letzteren ich annehmen darf, dass sie ausreichen, um, wo es Bedürfnis wird, zu den Quellen zurückzuführen.

Von den drei Teilen, in welche der Inhalt des Buches gegliedert ist, behandelt der erste die Theorie der linearen Fehler und ist naturgemäss der umfangreichste; er enthält alles, was auf direkte Beobachtungen sich bezieht. Der zweite Teil ist der Begründung der Methode der kleinsten Quadrate gewidmet und schliesst die Grundlagen der Ausgleichung vermittelnder und bedingter Beobachtungen in sich. Der dritte Teil hat den jüngsten Zweig der Fehlertheorie, die Fehler in der Ebene und im Raume, zum Gegenstande. Im Einzelnen möge auf das ausführliche Inhaltsverzeichnis hingewiesen werden.

Brünn, Juli 1891. **E. Czuber.**

Inhaltsverzeichnis.

Erster Teil.

Theorie der linearen Beobachtungsfehler.

§ 5. Das Fehlergesetz auf Grund der Hypothese der Elementarfehler.

§ 6. Das Fehlergesetz auf Grund verschiedener Annahmen.

§ 7. Beurteilung der Genauigkeit einer Beobachtungsreihe auf Grund der wahren Fehler.

§ 8. Beurteilung der Genauigkeit einer Beobachtungsreihe auf Grund der scheinbaren Fehler.

§ 9. Vergleichung des Fehlergesetzes mit der Erfahrung.

§ 10. Der kleinste und grösste Fehler einer Beobachtungsreihe.

§ 11. Ausscheidung widersprechender Beobachtungen.

Zweiter Teil.

Die Methode der kleinsten Quadrate.

§ 1. Stellung der Aufgabe.

§ 2. Die Vorläufer von Gauss.

§ 3. Erster Beweis von Gauss.

§ 4. Der Beweis von Laplace.

§ 5. Zweiter Beweis von Gauss.

§ 6. Ivory's sogen. Beweise.

§ 7. Beurteilung der Genauigkeit der Beobachtungen und der aus ihnen abgeleiteten Werte der Elemente.

§ 8. Darstellung der Werte der Unbekannten, ihrer Gewichte und mittleren Fehler mittels der Determinanten.

§ 9. Beurteilung der Genauigkeit einer Funktion direkt beobachteter oder aus Beobachtungen abgeleiteter Grössen.

Dritter Teil.

Theorie der Fehler in der Ebene und im Raume.

§ 1. Das Gesetz der Fehler in der Ebene und im Raume.

§ 2. Genauigkeit der Bestimmung eines Punktes in der Ebene.

§ 3. Genauigkeit der Bestimmung eines Punktes im Raume.

THEORIE

DER

BEOBACHTUNGSFEHLER.



Erster Teil.

Theorie der linearen Beobachtungsfehler.

§ 1. Wahrscheinlichkeit eines Beobachtungsfehlers.

1. Zwischen der Bestimmung einer Grösse durch Rechnung und durch Messung besteht ein wesentlicher Unterschied. Während die Rechnung den Wert der unbekannten Grösse aus den Prämissen durch rein logische Schlüsse mit absoluter oder mit beliebig weit getriebener Genauigkeit zu finden gestattet, tritt im andern Falle an die Stelle der logischen Schlüsse der physische Vorgang der Messung oder Beobachtung, der, von einer Reihe verschiedenartiger nie genau zu verfolgender Umstände begleitet, eine Abweichung des Resultates von der Wahrheit zur Folge hat, deren Betrag innerhalb gewisser Grenzen ungewiss bleibt. Diese Grenzen können zwar durch Vervollkommnung der Hilfsmittel und Methoden enger gezogen werden; die Gewissheit aber, dass das Resultat mit der Wahrheit zusammentreffe, ist niemals zu erreichen.

Die Fehler, welche den Beobachtungen einer gewissen Art anhaften, sind in dem Maasse wie diese selbst mehr oder weniger zusammengesetzter Natur. Selbst bei einem einfachen Messungsvorgange wird man bei näherem Zusehen mehrere verschiedene Ursachen oder Quellen von Fehlern nachweisen können, während andere wegen der Unvollkommenheit unserer Kenntnisse verborgen bleiben. In welcher Weise jede dieser Ursachen zur Wirkung kommt, hängt von den während der Messung herrschenden Umständen ab; jedesmal aber wird der Gesamtfehler des Beobachtungsresultats

die algebraische Summe der aus den einzelnen Quellen entspringenden oder der Elementarfehler sein.

In Bezug auf ihre Wirkungsweise lassen sich, wenn auch nicht scharf, zwei Gattungen von Fehlerursachen unterscheiden. Der einen Gattung von Ursachen gegenüber erscheinen die einzelnen Beobachtungen als völlig unabhängige Ereignisse, d. h. die Wirkung dieser Ursachen ist durch Umstände bedingt, welche von einer Beobachtung zur nächsten sich ändern und mit dieser selbst in keinem nachweisbaren Zusammenhange stehen. Die durch derlei Ursachen hervorgebrachten Fehler werden als unregelmässige oder zufällige Fehler bezeichnet.

Zu der zweiten Gattung werden solche Ursachen gezählt, welche während einer Reihe von Beobachtungen in einer gesetzmässigen, durch die Umstände der Beobachtung bedingten oder beständig in derselben Weise zur Wirkung kommen. Die durch sie hervorgerufenen Fehler werden als systematische, regelmässige oder, im letztgedachten Falle, als konstante Fehler bezeichnet.

Es ist schon bemerkt worden, dass diese Scheidung keine scharfe ist, indem es ganz wohl vorkommen kann, dass eine Fehlerquelle je nach Umständen bald systematische, bald zufällige Fehler erzeugt. So wären die aus der Ungleichförmigkeit der Teilung an einem Winkelmessinstrument entspringenden Fehler streng genommen zu den systematischen zu zählen, und sie werden vollends konstant, wenn das Instrument zur wiederholten Messung ein und desselben Winkels bei unveränderter Lage des Kreises verwendet wird. Man rechnet sie aber in der Regel zu den zufälligen Fehlern, weil bei der Messung verschiedener Winkel immer andere und andere Stellen des Kreises zur Verwendung kommen. Aber auch der Fall ist denkbar, dass eine Fehlerquelle, welche durch eine kurze Zeit systematisch wirkt, bei längerer Dauer der Beobachtungen ihre Wirkungsweise derart ändert, dass die ihr zugeschriebenen Fehler als zufällig gelten können. So kann ein von dem vermuteten abweichender Zustand der Atmosphäre eine beschränkte Zeit hindurch systematische, ja konstante Fehler hervorrufen, sich aber bei weiterer Fort-

setzung der Beobachtungen derart ändern, dass die Fehler diesen Charakter verlieren und wie zufällige sich verhalten.

Man führt in längeren Beobachtungsreihen diesen Übergang künstlich herbei, indem man die Umstände der Absicht entsprechend ändert, systematischen Fehlern den wesentlichen Charakter zufälliger Fehler aufzuprägen, welcher in dem fortwährend wechselnden Sinne besteht.

Die Fehlertheorie macht überhaupt die Voraussetzung, dass die Beobachtungen von konstanten und systematischen Fehlern befreit worden sind, ehe sie der weiteren Untersuchung zugeführt werden. Denn man erkennt bald, dass diese Fehler einer allgemeinen Theorie unzugänglich sind, vielmehr in jedem einzelnen Falle eine besondere Untersuchung erfordern.

Den alleinigen Gegenstand der Fehlertheorie bilden also die unregelmässigen oder zufälligen Fehler.

2. Die Beantwortung der Frage, ob es angehe, auf die Ergebnisse der Beobachtungen die Theorie des Zufalls anzuwenden, hängt davon ab, ob es möglich ist, eine numerische Wahrscheinlichkeit anzugeben für einen Fehler von bestimmtem Betrage bei einer unter gewissen Umständen ausgeführten Beobachtung*). Es ist einerlei, ob man diese Vorfrage bezüglich des aus einer einzelnen Fehlerquelle hervorgehenden oder bezüglich des Gesamtfehlers stellt; denn ist sie für jeden Elementarfehler zu bejahen, so gilt die Bejahung auch für den Gesamtfehler.

Ehe wir darauf eingehen, wollen wir an einem einfachen typischen Beispiel die wesentlichen Voraussetzungen klar machen, an welche die Möglichkeit einer numerischen Wahrscheinlichkeitsbestimmung geknüpft ist. Aus einer Urne, welche schwarze und weisse, nur durch die Farbe unterschiedene Kugeln in einer bestimmten beständig gleich bleibenden Anzahl enthält, wird mehremale nach einander eine Kugel gezogen, die gezogene Kugel jedesmal zurückgelegt und mit den übrigen gehörig vermischt. Sind im Ganzen

---

*) Kries, Die Principien der Wahrsch.-R. Eine logische Untersuchung 1886, pag. 217.

$m+n$ Kugeln gezogen worden, m davon weiss, so schliesst man auf Grund des Bernoulli'schen Theorems, dass die Wahrscheinlichkeit, in einer folgenden Ziehung eine weisse Kugel zu treffen, sich von dem Bruche $\frac{m}{m+n}$ nur unerheblich und um so weniger unterscheiden werde, je grösser die Zahl $m+n$ ist. Die Berechtigung dieser aposteriorischen, d. h. auf Grund von Beobachtungen ausgeführten Wahrscheinlichkeitsbestimmung hat eine Reihe nothwendiger Voraussetzungen zur Grundlage, welche hier deutlich zu Tage treten. Es sind dies die konstant bleibenden Chancen für das Ziehen einer weissen und schwarzen Kugel, die Chancengleichheit der Einzelfälle, die Unabhängigkeit der Ziehungen unter einander.

Andererseits kann die Entscheidung darüber, ob diese Voraussetzungen erfüllt sind, auf empirischem Wege getroffen werden, allerdings nicht mit Sicherheit, sondern nur mit mehr weniger grosser Wahrscheinlichkeit. Angenommen, wir wüssten nicht, ob der Inhalt der Urne, beziehungsweise das Zahlenverhältnis der weissen und schwarzen Kugeln, im Verlaufe der Ziehungen constant bleibt, ob die Ziehungen von einander unabhängig sind, ob also die gezogene Kugel jedesmal zurückgelegt und mit den übrigen gehörig vermengt worden ist, und es wäre uns auch unbekannt, ob nicht etwa ein anderes Merkmal als die Farbe eine Ungleichheit der Chancen für die einzelnen Fälle herbeiführt. Hätten wir nun die Resultate einer Anzahl von Beobachtungsreihen, welche sich in den Zahlen m, n; m', n'; m'', n''; $\cdots$ ausdrücken, und fänden, dass die Zahlen $\frac{m}{m+n}, \frac{m'}{m'+n'}, \frac{m''}{m''+n''}, \cdots$ oder $\frac{m}{n}, \frac{m'}{n'}, \frac{m''}{n''}, \cdots$ nur sehr geringe Unterschiede aufweisen, so dürften wir aus diesem Verhalten der Resultate mit um so grösserer Wahrscheinlichkeit auf das Vorhandensein jener Voraussetzungen schliessen, je grösser die Anzahl der Beobachtungsreihen und je ausgedehnter die einzelne ist.

Wenn wir nun zu dem Fall von Beobachtungen zurückkehren und den Versuch machen, die aufgeworfene Frage zu beantworten, so werden wir bald gewahr, dass spekulative

Erwägungen dazu nicht ausreichen. Unsere Kenntnis der zahlreichen Umstände, welche wir bei der betreffenden Gattung von Beobachtungen als maassgebend erkannt haben, bieten hierfür keine genügende Unterlage. Dazu kommt noch, dass andere Umstände sich unserer Wahrnehmung entziehen, wieder andere uns als irrelevant erscheinen, während sie es in Wirklichkeit nicht sind.

Bei näherer Betrachtung der Umstände, welche bei den einzelnen Fehlerquellen maassgebend sind, werden wir ganz wohl auf Fehlerquellen kommen, bei welchen die Voraussetzungen für die Bildung numerischer Wahrscheinlichkeiten als vorhanden angenommen werden können. So können die Verhältnisse, welche für die aus den Sinnesorganen, aus dem Bau des Instrumentes und seiner einzelnen Theile entspringenden Fehler bestimmend sind, wenigstens bei zeitlich nicht allzu ausgedehnten Beobachtungsreihen als völlig oder nahe constant angesehen werden. Andere Fehlerquellen wieder, wie etwa die kleinen Ungleichförmigkeiten einer Teilung, lassen eine ganz bestimmte Anzahl möglicher Fälle erkennen, welche im Wechsel der bedingenden Umstände beständig sich wiederholen. Bei einer anderen Gruppe von Fehlerquellen, wie bei den störenden Einflüssen der Ungleichförmigkeit der Temperatur, bei den Erschütterungen des Instruments, den Schwankungen in der Aufmerksamkeit des Beobachters werden die Verhältnisse häufig so liegen, dass der Gesamtbetrag dieser Einflüsse als etwas von vornherein Bestimmtes gedacht werden kann, während die Art ihrer zeitlichen und räumlichen Verteilung unbestimmt und dem Zufall überlassen bleibt.

Ob aber die Voraussetzungen einer numerischen Wahrscheinlichkeitsbestimmung, wenn sie einmal vorhanden waren, im Laufe der Beobachtungen auch erfüllt bleiben, kann nur vermutet werden. Dass es mit grosser Wahrscheinlichkeit der Fall ist, bestätigt das empirische Verfahren. Wir werden an späterer Stelle Reihen von Beobachtungsfehlern kennen lernen, welche eine so gleichartige Zusammensetzung aufweisen, dass man sich berechtigt hält anzunehmen, dass bei ihrer Hervorbringung ähnliche Verhältnisse geherrscht haben wie bei einem Zufallsspiele.

Wir nehmen also für die Folge an, dass bei den Beobachtungen, welche wir der Behandlung unterziehen, bezüglich der Erzeugung der Fehler, und zwar sowohl der elementaren als auch des Gesamtfehlers, solche Verhältnisse bestanden haben, welche die Angabe einer numerischen Wahrscheinlichkeit für jeden Fehler von bestimmtem Betrage zulassen.

3. Der aus einer Fehlerquelle entspringende Fehler ist im allgemeinen aller zwischen gewissen, nicht näher zu bezeichnenden Grenzen liegenden Werte fähig. Daneben gibt es aber auch Fehlerquellen, bei welchen die möglichen Fehlerbeträge eine diskrete Wertreihe bilden. Für den Gesamtfehler, welcher sich als algebraische Summe der Elementarfehler darstellt, folgt daraus, dass auch er im allgemeinen alle zwischen gewissen Grenzen enthaltenen Werte annehmen kann, welche Grenzen jedoch wie bei den Elementarfehlern unbestimmt bleiben. Die Fehlertheorie betrachtet daher den unbestimmten Beobachtungsfehler als eine stetig veränderliche Grösse.

Diese Auffassung entspricht allerdings den praktischen Verhältnissen nicht. Vermöge der bei jeder Gattung von Beobachtungsfehlern bestehenden Grenze des noch deutlich Wahrnehmbaren bilden die Fehlerbeträge, welche konstatiert werden können, eine diskrete Wertreihe; mit anderen Worten: Fehlerbeträge, deren Differenz kleiner ist als die Grenze des deutlich Unterscheidbaren, werden als gleich befunden. Nichtsdestoweniger kann eine allgemeine Theorie von der Vorstellung der stetigen Veränderlichkeit des Fehlers nicht absehen, weil diese allein eine analytische Behandlung möglich macht.

4. Es ist oben von der Wahrscheinlichkeit eines bestimmten Fehlerbetrages gesprochen worden. Dieser Begriff bedarf eine Präzisierung, da er in der vorliegenden Fassung ebenso wenig Bedeutung hat wie die Wahrscheinlichkeit, dass ein in einer begrenzten geraden Linie willkürlich angenommener Punkt mit einem bestimmten Punkte dieser Linie zusammenfalle.

Wir gehen daher von dem leicht verständlichen Begriff

der Wahrscheinlichkeit aus, dass der einer Beobachtung anhaftende Fehler zwischen den Grenzen 0 und x enthalten sei, und bezeichnen dieselbe, sie uns als Funktion von x allein vorstellend, mit $\Phi(x)$. Über diese Funktion können wir zunächst nur die eine bestimmte Aussage machen, dass sie ihren Wert nicht mehr ändert, sobald x die untere oder die obere Grenze der Fehler überschritten hat; denn die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler zwischen Null und einer solchen Grenze liegt, ist dieselbe wie die Wahrscheinlichkeit, dass er zwischen Null und einem jenseits dieser Grenze liegenden Betrag zu suchen sei.

Wird nun die willkürliche Annahme gemacht, dass $\Phi(x)$ eine analytische Funktion von x sei, sind ferner x und $x + \Delta x$ innerhalb der Fehlergrenzen liegende Beträge, so drückt die Differenz $\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x)$ die Wahrscheinlichkeit aus, dass der Fehler einer Beobachtung zwischen den Grenzen x und $x + \Delta x$ eingeschlossen ist. Je kleiner Δx, desto genauer wird jene Differenz durch das Produkt $\frac{d\Phi(x)}{dx}\Delta x$ dargestellt, so dass, wenn man

$$\frac{d\Phi(x)}{dx} = \varphi(x) \tag{1}$$

setzt, die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers zwischen den Grenzen x und $x + dx$ durch $\varphi(x)dx$ dargestellt werden kann.

Wenn man $\varphi(x)dx$ kurzweg als die Wahrscheinlichkeit des Fehlers x bezeichnet, so gründet sich dies auf die Vorstellung, dass alle Fehler des Intervalls x bis $x + dx$ als unter einander gleich und gleich x angesehen werden, gegen welche vom praktischen Standpunkte nichts einzuwenden ist.

Die Umkehrung der Beziehung (1) giebt die neue

$$\Phi(x) = \int_0^x \varphi(x)dx, \tag{2}$$

vermöge welcher die Funktion $\Phi(x)$ durch ein bestimmtes Integral der Funktion $\varphi(x)$ dargestellt ist.

Es ist durch verschiedene Bezeichnungen versucht worden, die Bedeutung der Funktion $\varphi(x)$ zu charakterisieren.

In seiner ersten Darstellung*) nennt sie Gauss unzutreffend die Wahrscheinlichkeit des Fehlers x, später**) bezeichnet er sie als die relative Häufigkeit des Fehlers; diese Bezeichnung deckt sich am besten mit dem wahren Sinn. Cauchy***) nennt $\varphi(x)$ den Index der Wahrscheinlichkeit des Fehlers x. Bei englischen Geometern ist die Bezeichnung: Gezetz der Leichtigkeit der Beobachtungsfehler (the law of facility of errors of observations) gebräuchlich. Wir werden $\varphi(x)$ kurz das Fehlergesetz nennen.

Aus der oben hervorgehobenen Eigenschaft von $\Phi(x)$ würde hervorgehen, dass $\varphi(x)$ jenseits der Grenzen des Gesamtfehlers beständig Null sei. Die getroffene Annahme aber, dass $\Phi(x)$ und daher auch $\varphi(x)$ eine analytische Funktion sein soll, wird sich im allgemeinen mit den angegebenen Eigenschaften dieser beiden Funktionen nicht vereinbaren lassen. Überhaupt wird eine analytische Funktion den wahren Verlauf der Fehlerwahrscheinlichkeit in voller Strenge niemals darstellen können, und nur die Erfahrung kann darüber entscheiden, ob die Abweichungen innerhalb zulässiger Grenzen sich bewegen.

Die Kurve, deren Gleichung

$$y = \varphi(x) \tag{3}$$

ist, stellt in ihren Ordinaten den Verlauf der Wahrscheinlichkeit des Fehlers x, welcher als Abscisse aufgetragen wird, dar und heisst aus diesem Grunde die Fehlerwahrscheinlichkeitskurve. Es hat dann die Wahrscheinlichkeit $\varphi(x)dx$ eines Fehlers zwischen x und $x + dx$ die Bedeutung des Flächenelements und die Wahrscheinlichkeit $\Phi(x)$ eines Fehlers zwischen 0 und x, wie überhaupt die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers zwischen zwei um einen endlichen Betrag verschiedenen Grenzen a, b die Bedeutung der Fläche, welche über dem durch die Grenzen bezeichneten Stück der Abszissenaxe ruht und nach oben hin durch die Kurve (3) begrenzt wird. Die Wahrscheinlichkeit endlich, dass der

---

*) Theoria motus corp. coel., Hamburgi 1809, Art. 175.

**) Theoria combinat. observat. etc., Gotting. 1823, Art. 4.

***) Compt. rend. XXXVII, pag. 264.

Fehler einer Beobachtung zwischen die äussersten Grenzen der möglichen Fehler falle, welche die Gewissheit ist, entspricht der ganzen Fläche der Kurve, die daher bei den Flächenvergleichungen als Einheit zu dienen hat. Eine allgemeine, alle Arten von Beobachtungen umfassende Theorie muss diese Grenzen unbestimmt lassen; sie wird alle Fälle in sich begreifen, wenn sie die Grenzen bis $-\infty$ und $+\infty$ erstreckt, so dass

$$(4) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,dx = 1$$

sein wird. Erfüllt $\varphi(x)$ die Forderung, dass es für alle Werte von x jenseits der Fehlergrenzen Null ist, dann hat die Erstreckung des Integrationsgebietes keine Folgen; erfüllt die Funktion jene Forderung nicht, dann muss sie notwendig jenseits der Fehlergrenzen so kleine Werte annehmen, dass der daraus resultierende Anteil des Integrals gegenüber demjenigen, welcher sich auf dem Gebiet der möglichen Fehler ergibt, als verschwindend betrachtet werden kann.

Neben dieser Darstellung des Fehlergesetzes durch eine Kurve gibt es noch eine zweite, welche darin besteht, dass man sich die Gerade, auf welcher die Fehler abgetragen werden, mit Masse besetzt denkt, deren Dichte in der Entfernung x vom Nullpunkte gleichkommt $\varphi(x)$. Dann bedeutet die Masse eines Stückes der materiellen Geraden die Wahrscheinlichkeit, dass der Endpunkt des Fehlers diesem Stück angehöre, während die Masse der ganzen Geraden die Einheit ist (vgl. Art. 154).

Insofern der Fehler, welcher einer unmittelbar gemessenen Grösse anhaftet, auf einer Geraden dargestellt werden kann, bezeichnet man ihn als einen linearen Fehler.

5. Das wahre Gesetz der Wahrscheinlichkeit der Beobachtungsfehler, für welches die analytische Funktion $\varphi(x)$ eine Annäherung bilden soll, hängt ohne Zweifel nicht allein von der Grösse des Fehlers, sondern auch von anderen Umständen ab und ändert sich daher von Fall zu Fall. So wird die Individualität des Beobachters, die Be-

schaffenheit der von ihm verwendeten Instrumente, die gemessene Grösse selbst dabei eine Rolle spielen.

Die Aufstellung von $\varphi(x)$ kann nicht Gegenstand einer rein analytischen Deduktion sein, sie muss sich vielmehr notwendig auf die Erfahrung stützen. Das primitivste Verfahren bestünde darin, dass man versuchsweise Formen für $\varphi(x)$ aufstellt, welche gewissen durch die Erfahrung diktierten Forderungen genügen; der Vergleich mit ausgeführten Beobachtungsreihen hätte dann zu entscheiden, wie weit diese Formen der Wirklichkeit entsprechen und welche von ihnen es am vollkommensten thut.

Von diesem Verfahren sehen wir hier aus naheliegenden Gründen ab und wenden uns zuerst demjenigen zu, welches der ersten wissenschaftlich begründeten Aufstellung von $\varphi(x)$ durch Gauss zu Grunde liegt*). Dieses Verfahren beruht auf folgenden Erwägungen.

Ist eine Reihe von Beobachtungen in der Absicht ausgeführt worden, um die Werte für eine oder mehrere unbekannte Grössen daraus abzuleiten, und ist ein allgemeines wahrscheinlichkeitstheoretisches Prinzip über die zweckmässigste Wahl dieser Werte aufgestellt worden, so können mit Hilfe dieses Prinzips und der als bekannt vorausgesetzten Funktion φ, welche das Gesetz der Fehler jener Beobachtungen ausdrückt, die gesuchten Werte ermittelt werden.

Wenn aber umgekehrt in einem solchen Falle bezüglich der Wahl dieser Werte kein Zweifel besteht oder eine Hypothese aufgestellt worden ist, so lässt der angedeutete Weg die Möglichkeit der Bestimmung von φ offen. Es ist klar, dass das Vertrauen, welches die so gefundene Form des Fehlergesetzes beanspruchen darf, nicht stärker sein kann als dasjenige, welches die Hypothese über die zweckmässigste Wahl der Werte der Unbekannten selbst einflösst. Je besser also diese Hypothese begründet ist, desto berechtigter die Erwartung, dass die Function φ dem wahren Gesetz der Wahrscheinlichkeit der Beobachtungsfehler nahe kommen werde.

---

*) Theoria motus corp. coel.

Nicht zu übersehen ist hierbei der Umstand, dass die Aufstellung des allgemeinen Prinzips über die zweckmässigste Wahl der Werte für die Unbekannten selbst wieder eine Willkür in sich schliesst.

§ 2. Allgemeine Prinzipien über die zweckmässigste Wahl des Wertes der Unbekannten.

6. Der einfachste Fall der Bestimmung unbekannter Grössen aus Beobachtungen tritt ein, wenn eine Grösse, deren Wert festgestellt werden soll, wiederholt unmittelbar und mit gleicher Genauigkeit gemessen worden ist. Man spricht dann von direkten Beobachtungen gleicher Genauigkeit.

Was man unter Beobachtungen gleicher Genauigkeit zu verstehen habe, bedarf einer Erklärung. Im gewöhnlichen Sinne bezeichnet man Messungen einer und derselben Grösse als gleich genau, wenn sie um denselben Betrag von der Wahrheit nach der einen oder andern Seite abweichen. In diesem Sinne kann aber bei mehr als zwei Beobachtungen, deren Resultate von einander verschieden sind, von gleicher Genauigkeit nicht die Rede sein. In der Fehlertheorie fasst man jene Bezeichnung vielmehr dahin auf, dass einem Fehler von irgend welchem bestimmten Betrage bei allen Beobachtungen die nämliche Wahrscheinlichkeit zukommt, mit andern Worten, dass die Fehler aller Beobachtungen ein und demselben Gesetze folgen.

Für eine unbekannte Grösse seien also durch n gleich genaue Beobachtungen die Werte $l_1, l_2, \ldots l_n$ gefunden worden.

Angenommen, x sei der wahre Wert jener Grösse; dann sind $x - l_1, x - l_2, \ldots x - l_n$ die den Beobachtungen anhaftenden Fehler. Bezeichnet $\varphi(\varepsilon)$ das Gesetz, welchem sie unterliegen, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass die erste, zweite, ... Beobachtung den Wert $l_1, l_2, \ldots$ ergeben habe, proportional beziehungsweise $\varphi(x - l_1), \varphi(x - l_2), \ldots$ Sofern man die einzelnen Beobachtungen als von einander unabhängig voraussetzen kann in dem Sinne, dass das Ergebnis

der einen ohne Einfluss ist auf das Ergebnis der nachfolgenden, ist die Wahrscheinlichkeit a priori des beobachteten Ereignisses, bestehend in dem Zusammentreffen der Resultate $l_1, l_2, \ldots l_n$, proportional dem Produkt.

$$(1) \qquad \Omega = \varphi(x - l_1)\,\varphi(x - l_2)\ldots\varphi(x - l_n).$$

Die Grösse x, als Ursache des beobachteten Ereignisses angesehen, ist aller zwischen gewissen Grenzen x_0, X gelegenen Werte fähig. Nimmt man an, dass vor Ausführung der Messungen mangels anderweitiger Kenntnisse alle diese Werte als gleich möglich angesehen werden müssen, so ist die Wahrscheinlichkeit a priori, dass der Wert der Unbekannten zwischen den Grenzen x und $x + dx$ eingeschlossen sei, unabhängig von x und nur dem Intervall dx der Grenzen proportional, so dass die Wahrscheinlichkeit der letzteren Annahme über den Wert der Unbekannten nach erfolgten Beobachtungen dargestellt ist durch

$$(2) \qquad p = \frac{\varphi(x - l_1)\,\varphi(x - l_2)\cdots\varphi(x - l_n)\,dx}{\int\limits_{x_0}^{X} \varphi(x - l_1)\,\varphi(x - l_2)\cdots\varphi(x - l_n)\,dx}.$$

Dieser Ansatz entspricht den thatsächlichen Verhältnissen insofern nicht vollständig, als man in Wirklichkeit bezüglich der zu bestimmenden Grösse wohl niemals in solcher Unkenntnis sich befinden wird, um über ihren wahren Wert keine gegründeten Vermutungen aufstellen zu können*). Die apriorische Wahrscheinlichkeit wird also nicht für alle Werte von x dieselbe, sondern nach einer Funktion von x geregelt sein, welche, dem Satze von Bayes gemäss, in dem Ausdruck für p als Faktor im Zähler und im Nenner unter dem Integralzeichen auftreten sollte. Der Grund, warum diese Inkorrektheit keinen Nachteil zur Folge hat, liegt darin, dass innerhalb jener Grenzen, welche praktisch in Betracht kommen können, die einzelnen Werte von x thatsächlich als gleich möglich angesehen werden dürfen, während ausserhalb dieser Grenzen, wo eine erhebliche Änderung dieses Verhältnisses eintritt, zufolge der Natur der Funktion φ, wie bald gezeigt

*) Kries, Princ. der Wahrsch.-R., pag. 122 flg.

werden wird, das Produkt Ω von so geringfügigem Betrage ist, dass die Hinzufügung eines weiteren von x abhängigen endlichen Faktors eine Modifikation des Resultates nicht herbeiführen kann. In dem letzteren Umstande ist es auch begründet, dass man, analytischer Vorteile halber, das Gebiet x_0 bis X der möglichen Werte von x auf das Gebiet $-\infty$ bis $+\infty$ aller reellen Zahlen ausdehnen darf.

In demselben Sinne, in welchem $\varphi(\varepsilon)$ das Gesetz der Wahrscheinlichkeit des Fehlers der einzelnen Beobachtung darstellt, drückt

$$y = H\varphi(x - l_1)\varphi(x - l_2)\dots\varphi(x - l_n) \tag{3}$$

das Gesetz der Wahrscheinlichkeit der Werte von x aus, wenn man zur Abkürzung

$$\frac{1}{H} = \int_{x_0}^{X} \varphi(x - l_1)\varphi(x - l_2)\dots\varphi(x - l_n)dx$$

setzt. Eine Kurve mit obiger Gleichung, x als Abszisse und y als Ordinate aufgefasst, wird den Verlauf dieser Wahrscheinlichkeit zur Anschauung bringen.

7. Gauss*) wählt unter den verschiedenen Werten von x denjenigen als den zweckmässigsten, für welchen die Wahrscheinlichkeit p am grössten ist, und nennt ihn demgemäss den wahrscheinlichsten Wert von x**). Seine Bestimmung führt in letzter Linie auf die Bedingung

$$\Omega \text{ ein Maximum}$$

oder

$$\frac{d\Omega}{dx} = 0. \tag{4}$$

Da mit Ω gleichzeitig auch y ein Minimum wird, so entspricht in der geometrischen Darstellung von (3) der

---

*) Theoria motus corp. coel., Art. 177. — Vgl. hierzu Anmerkg. zu 123.

**) Dieses Prinzip ist schon von Daniel Bernoulli befolgt worden: Dijudicatio maxime probabilis plurius observationum discrepantium atque verisimillima inductio inde formanda, Acta Acad. Petropolit. p. 1777, pag. 3 flg. Von Euler wurde dasselbe bestritten (ibid., pag. 24 flg.) und durch ein anderes ersetzt, dessen Anführung wir für überflüssig halten.

wahrscheinlichste Wert von x der grössten Ordinate als Abszisse.

8. Laplace*) geht von der Anschauung aus, dass jeder Fehler in der zu bestimmenden Grösse, er sei positiv oder negativ, wie ein Verlust im Spiele anzusehen sei, und dass man daher jeden Wert, welchen man wählt, nach dem mutmaasslichen Gesamtverlust, d. i. nach der Summe der Produkte aller möglichen Fehler, ohne Rücksicht auf ihr Vorzeichen, mit ihren respektiven Wahrscheinlichkeiten zu beurteilen habe. Diesen mutmaasslichen Gesamtverlust bezeichnet er als den „mittleren zu befürchtenden Fehler"; im Einklange mit der jetzt üblichen Terminologie wäre er als „durchschnittlicher Fehler" zu benennen. Als den vorzugsweise zu wählenden Wert von x erklärt nun Laplace denjenigen, welchem der kleinste durchschnittliche Fehler zukommt.

Um diesen Wert a zu finden, verlegen wir den Anfangspunkt für die Zählung der Werte x in den Anfangspunkt x_0 ihres Gebietes und nennen dann die Koordinaten eines beliebigen Punktes der Wahrscheinlichkeitskurve (3) x', y'. Ist x' der wahre Wert der Unbekannten, so ist $x' - a$ der Fehler von a; derselbe ist positiv oder negativ, jenachdem x' grösser oder kleiner ist als a; mithin ist der durchschnittliche Fehler von a gleich

$$\int_0^a (a - x')y'dx' + \int_a^{X'} (x' - a)y'dx';$$

die Bedingung seines Minimums besteht in dem Verschwinden des in Bezug auf a gebildeten Differentialquotienten und lautet

$$\int_0^a y'dx' = \int_a^{X'} y'dx'. \tag{5}$$

Geometrisch ist also der nach dieser Vorschrift zu

*) Théorie analyt. des Probab., II., Art. 23. Die erste Veröffentlichung dieses Teils fällt in das Jahr 1774, Mém. Acad. Paris par divers Savans, vol. VI, pag. 621 flg. — Vgl. ferner Hist. Acad. Paris p. a. 1778, pag. 322 flg.

wählende Wert von x durch diejenige Abszisse dargestellt, deren zugehörige Ordinate die ganze von der Wahrscheinlichkeitskurve (3) begrenzte Fläche halbiert, so dass die Wahrscheinlichkeit, der wahre Wert sei kleiner als a, ebenso gross ist wie die Wahrscheinlichkeit, er sei grösser als a.

9. Von einem ähnlichen Gesichtspunkte ist Gauss in seiner späteren, unserem Gegenstande gewidmeten Arbeit*) ausgegangen. Auch er vergleicht die Bestimmung einer Grösse durch Beobachtung mit einem Glücksspiele, bei dem nur verloren werden kann. Während aber Laplace die Grösse des Verlustes nach dem absoluten Betrage des Fehlers schätzt, wählt Gauss hierzu das Quadrat des Fehlers als die einfachste, beständig positiv bleibende stetige Funktion desselben. Eine Willkür lässt sich, wie Gauss selbst hervorhebt, weder der einen noch der andern Festsetzung absprechen, und welche von beiden man vorziehen soll, kann durch abstrakte Erwägungen nicht festgestellt werden. Für die analytische Behandlung ist das von Gauss befolgte Prinzip insofern geeigneter, als es den Zeichenunterschied der Fehler und damit die Unterbrechung der Stetigkeit, welche bei dem Laplace'schen Prinzip an der Nullstelle eintritt, in der einfachsten Weise aufhebt.

Im Sinne dieses Prinzips ist eine Bestimmung der unbekannten Grösse zu beurteilen nach der Summe der Produkte aus den Quadraten der möglichen Fehler mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten; die Quadratwurzel aus dieser Summe bezeichnet Gauss als den mittleren in der Bestimmung zu befürchtenden Fehler und erklärt diejenige Bestimmung für die zweckmässigste, welche den kleinsten mittleren Fehler zur Folge hat.

Mit Beibehaltung der vorhin eingeführten Bezeichnungen ist das Quadrat des mittleren Fehlers in der Bestimmung a durch

$$\int_{x_0}^{X} (x - a)^2 y \, dx$$

*) Theoria combin. observ., art. 6. — Vgl. hierüber Anmerkg. zu 123.

dargestellt, und die Bedingung seines Minimums in Bezug auf a lautet

$$(6) \qquad \int_{x_0}^{X} (x - a) y dx = 0.$$

Der auf Grund dieses Prinzips zu wählende Wert der Unbekannten ist also durch die Abszisse des Schwerpunktes der ganzen von der Wahrscheinlichkeitskurve (3) begrenzten Fläche bestimmt*).

Im allgemeinen werden die drei vorgeführten Bestimmungsweisen, welche nach dem, was bei der letzten bemerkt worden ist, noch durch andere vermehrt werden könnten, zu verschiedenen Resultaten führen; es sind aber Formen der Wahrscheinlichkeitskurve $y = H\Omega$ denkbar, für welche diese Resultate in eins zusammenfallen. Wir werden in kurzem den Fall näher betrachten.

§ 3. **Das arithmetische Mittel.**

10. In dem zu Beginn des vorigen Paragraphen definirten Falle direkter Beobachtungen gleicher Genauigkeit galt seit jeher bei den Beobachtern die Regel, dass der zweckmässigste Wert, welchen man für die Unbekannte wählen kann, das arithmetische Mittel aller Messungsergebnisse sei. Diese Regel hat Gauss**) als Hypothese oder als Axiom der Ableitung von φ zu Grunde gelegt in dem Sinne, dass er das arithmetische Mittel für den wahrscheinlichsten Wert der unbekannten Grösse erklärt. Auch Legendre beruft sich in der Arbeit***), welche neben der soeben citierten von Gauss die wissenschaftliche Verwertung von Beobachtungsergebnissen begründet hat, auf diese Regel.

Bevor wir von dieser Hypothese in dem angezeigten Sinne Gebrauch machen, wollen wir uns mit ihr selbst eingehender beschäftigen.

---

*) Vgl. den Schluss von Art. 12.

**) Theoria motus corp. coel., art. 177.

***) Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes, Paris 1806, pag. 74.

11. Die erste wissenschaftliche Untersuchung, beziehungsweise Begründung der Regel vom arithmetischen Mittel verdankt man Lagrange*). Die betreffende Arbeit, durch hohe Klarheit ausgezeichnet, bildet zugleich die erste Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf Beobachtungsfehler. Für unsere Zwecke wird es genügen, auf die beiden Probleme einzugehen, welche Lagrange als II. und V. behandelt.

Das erste derselben kann wie folgt ausgesprochen werden: Vorausgesetzt, man könne sich bei jeder Beobachtung um eine Einheit sowohl im positiven wie im negativen Sinne irren, es sei aber das Verhältnis der Anzahl der Fälle, in denen man ein genaues Resultat erhält, zur Anzahl derer, welche einen Fehler $+1$, beziehungsweise -1 geben, wie $a : b : b$; so verlangt man die Wahrscheinlichkeit, dass bei dem Mittel aus n Beobachtungen der Fehler den absoluten Betrag $\frac{m}{n}$ $(m < n)$ nicht überschreite.

In dem Mittel aus n Beobachtungen kann der Fehler offenbar einen der Werte $0, \pm \frac{1}{n}, \pm \frac{2}{n}, \cdots \pm \frac{n}{n} = \pm 1$

---

*) Mémoire sur l'utilité de la méthode, de prendre le milieu entre le résultats de plusieurs observations etc., Miscell. Taurinensia, tome V (für die Jahre 1770—1773, die Abhandlung selbst fällt in das Jahr 1774), pag. 167 flg. Der hier in Betracht kommende Teil der Arbeit ist wiedergegeben von Encke in der Abhandlung: Über die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf Beobachtungen, Berl. Astron. Jahrb. 1853. — Lagrange's Arbeit hat zur Zeit ihres Erscheinens vermöge der Neuheit des Gegenstandes die Aufmerksamkeit der Mathematiker in hohem Grade auf sich gelenkt. Dies beweisen mehrfache Reproduktionen und Kommentare, so von Joh. III. Bernoulli in der Encycl. Méthodique, vol. II, pag. 404 flg., von Euler in den Acta Acad. Petropolit., vol. III, pag. 289 flg., von Trembley in den Mém. Acad. Berlin 1801, pag. 29 flg. — Als Vorläufer von Lagrange hat Simpson zu gelten: An Attempt to show the Advantage arising by Taking the Mean of a Number of Observations, in Practical Astronomy, zum grössten Teil der Wiederabdruck einer 1756 in den London Philos. Transact. veröffentlichten Arbeit, erschienen in den Miscellaneous Tracts one some curious and very interesting Subjects in Mechanics, Physical-Astronomy and Speculative Mathematics, 1757, pag. 64 flg. In dieser für ihre Zeit höchst wertvollen Untersuchung ist die Idee eines Fehlergesetzes zum erstenmale ausgesprochen.

annehmen, und die Wahrscheinlichkeit, dass er dem absoluten Betrage nach $\frac{m}{n}$ nicht überschreite, wird die Summe der Wahrscheinlichkeiten sein, dass er $0, \pm 1, \pm \frac{2}{n}, \ldots \pm \frac{m}{n}$ betrage. Man wird also zuerst die Wahrscheinlichkeit des Fehlers $\pm \frac{\mu}{n}$ suchen.

Die Aufgabe kann auf das Spiel mit einem Würfel (im weiteren Sinne) zurückgeführt werden, auf welchem a Seiten mit 0, b Seiten mit $+1$ und b Seiten mit -1 bezeichnet sind; man wirft n mal und verlangt die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der erschienenen Zahlen $+\mu$ sei. Die Anzahl der diesem Ereignis günstigen Fälle ist der Koeffizient M von t^μ in der Entwickelung der n^{ten} Potenz des Trinoms $at^0 + bt + bt^{-1} = a + b(t + t^{-1})$. Da aber dieses Trinom symmetrisch ist in Bezug auf t und t^{-1}, so wird auch die Entwickelung der n^{ten} Potenz symmetrisch in Bezug auf gleich hohe positive und negative Potenzen von t; folglich wird auch der Koeffizient von $t^{-\mu}$ gleich M sein und die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler $\pm \frac{\mu}{n}$ betrage, sich darstellen in dem Bruche $\frac{2M}{(a+2b)^n}$.

Nun ist

$$(a + b(t + t^{-1}))^n = a^n + na^{n-1}b(t + t^{-1}) + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2(t + t^{-1})^2 + \cdots$$

und darin

$$(t + t^{-1})^2 = t^2 + t^{-2} + 2$$
$$(t + t^{-1})^3 = t^3 + t^{-3} + 3\,(t + t^{-1})$$
$$(t + t^{-1})^4 = t^4 + t^{-4} + 4\,(t^2 + t^{-2}) + \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2};$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

wenn man daher der obigen Entwickelung die Form

$$A + B\,(t + t^{-1}) + C\,(t^2 + t^{-2}) + \cdots$$

erteilt, so erkennt man alsbald, dass

$$A = a^n + \binom{2}{1}\binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{4}{2}\binom{n}{4}a^{n-4}b^4 + \binom{6}{3}\binom{n}{6}a^{n-6}b^6 + \cdots,$$
$$B = \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{3}{1}\binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \binom{5}{2}\binom{n}{5}a^{n-5}b^5 + \binom{7}{3}\binom{n}{7}a^{n-7}b^7 + \cdots,$$
$$C = \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{4}{1}\binom{n}{4}a^{n-4}b^4 + \binom{6}{2}\binom{n}{6}a^{n-6}b^6 + \binom{8}{3}\binom{n}{8}a^{n-8}b^8 + \cdots$$
. . . .

Demnach ist
$$M = \binom{n}{\mu}a^{n-\mu}b^{\mu} + \binom{\mu+2}{1}\binom{n}{\mu+2}a^{n-\mu-2}b^{\mu+2} + \binom{\mu+4}{2}\binom{n}{\mu+4}a^{n-\mu-4}b^{\mu+4} + \cdots$$
und die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler des Mittels dem absoluten Betrage nach $\frac{\mu}{n}$ nicht übertreffe,
$$P = \frac{A + 2B + 2C + \cdots + 2M}{(a + 2b)^n}.$$

Zwischen den Koeffizienten $A, B, C \ldots$ besteht ein Zusammenhang, welcher ihre successive Berechnung erleichtert; derselbe ergibt sich, wenn man die Gleichung
$$(a + b(t + t^{-1}))^n = A + B(t + t^{-1}) + C(t^2 + t^{-2}) + \cdots$$
logarithmisch differentiiert und das Resultat mit t multipliziert; wenn man hierauf die so gefundene Gleichung
$$\frac{nb(t - t^{-1})}{a + b(t + t^{-1})} = \frac{B(t - t^{-1}) + 2C(t^2 - t^{-2}) + 3D(t^3 - t^{-3}) + \cdots}{A + B(t + t^{-1}) + C(t^2 + t^{-2}) + D(t^3 + t^{-3}) + \cdots}$$
von den Nennern befreit und beide Seiten derselben vergleicht, so ergeben sich zur Bestimmung von $A, B, C, \ldots$ die Gleichungen
$$\begin{aligned} nb(A - C) &= aB + 2bC \\ nb(B - D) &= 2aC + b(B + 3D) \\ nb(C - E) &= 3aD + b(2C + 4E) \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$
aus welchen sich mit der Abkürzung $\frac{a}{b} = k$
$$C = \frac{nA - kB}{n + 2}$$
$$D = \frac{(n-1)B - 2kC}{n + 3}$$
$$E = \frac{(n-2)C - 3kD}{n + 4}$$
. . . .

findet, so dass mit Hilfe von A und B die übrigen Koeffizienten leicht berechnet werden können.

Macht man die spezielle Annahme $a = b$, also $k = 1$, welcher zufolge bei der einzelnen Beobachtung die Fehler 0, $+1$ und -1 mit gleicher Leichtigkeit begangen werden können, und rechnet P für $n = 1, 2, 3, \ldots$ und die verschiedenen zulässigen Werte von $\frac{\mu}{n}$, so gelangt man zu folgender Tabelle:

n	Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler des Mittels nicht überschreite $\pm\frac{0}{n}$	$\pm\frac{1}{n}$	$\pm\frac{2}{n}$	$\pm\frac{3}{n}$	$\pm\frac{4}{n}$	$\pm\frac{5}{n}$	$\pm\frac{6}{n}$
1	$\frac{1}{3}$	1					
2	$\frac{3}{9}$	$\frac{7}{9}$	1				
3	$\frac{7}{27}$	$\frac{19}{27}$	$\frac{25}{27}$	1			
4	$\frac{19}{81}$	$\frac{51}{81}$	$\frac{71}{81}$	$\frac{79}{81}$	1		
5	$\frac{51}{243}$	$\frac{141}{243}$	$\frac{201}{243}$	$\frac{231}{243}$	$\frac{241}{243}$	1	
6	$\frac{141}{729}$	$\frac{393}{729}$	$\frac{573}{729}$	$\frac{673}{729}$	$\frac{715}{729}$	$\frac{727}{729}$	1

Die Tabelle zeigt, dass bei zwei Beobachtungen die Wahrscheinlichkeit eines fehlerfreien Mittels dieselbe ist wie die einer fehlerfreien Einzelbeobachtung, nämlich $\frac{1}{3}$; während aber bei der letzteren, da sie nur der Fehler 0 und ± 1 fähig ist, die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler nicht grösser sei als $\frac{1}{2}$, dem absoluten Betrage nach, noch immer gleichkommt $\frac{1}{3}$, ist diese Wahrscheinlichkeit bei dem Mittel $\frac{7}{9}$.

Bei dem Mittel aus drei Beobachtungen ist die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 0 gleich $\frac{7}{27}$, also kleiner als bei einer Einzelbeobachtung; während aber bei der letzteren die Wahrscheinlichkeit für die Fehlergrenzen $\pm\frac{1}{3}$, $\pm\frac{2}{3}$ die-

selbe ist wie für den Fehler 0, nämlich $\frac{1}{3} = \frac{9}{27}$, beträgt sie bei dem Mittel $\frac{19}{27}$, beziehungsweise $\frac{25}{27}$.

Dieses Verhältnis verstärkt sich mit der Anzahl der Beobachtungen. Man überblickt es noch deutlicher, wenn man beispielsweise die Wahrscheinlichkeiten für die Fehlergrenzen $\pm \frac{1}{2}$ bei $n = 1, 2, 3, \ldots$ Beobachtungen zusammenstellt; man findet aus der obigen Tabelle

für	$n =$ 1,	2,	3,	4,	5,	6, ···
die Wahrscheinlichkeit	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{19}{27}$	$\frac{71}{81}$	$\frac{201}{243}$	$\frac{673}{729}$ ···
oder	$\frac{243}{729}$	$\frac{567}{729}$	$\frac{513}{729}$	$\frac{639}{729}$	$\frac{603}{729}$	$\frac{673}{729}$ ···

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler des Mittels innerhalb gegebener Zahlen eingeschlossen bleibe, nimmt also mit der Anzahl der Beobachtungen, welche zu dem Mittel vereinigt werden, zu und nähert sich sehr rasch der Einheit oder Gewissheit. Hierin bestehe, hebt Lagrange hervor, der Hauptvorteil, den man hei dem Mittel aus mehreren Beobachtungen erreicht.

Das zweite der angezogenen Probleme lautet: Angenommen, jede Beobachtung sei irgendwelchen gegebenen Fehlern unterworfen, und man kenne zugleich die Anzahl der Fälle, in welchen jeder Fehler eintreten wird, so verlangt man denjenigen Fehler des Mittels, für welchen die Wahrscheinlichkeit am grössten ist.

Es seien $p, q, r, \ldots$ die Fehler, welchen jede Beobachtung unterworfen ist, und $a, b, c, \ldots$ die bezügliche Anzahl der Fälle, welche jeden dieser Fehler eintreten lassen. Dann wird die Wahrscheinlichkeit, dass dem Mittel aus n Beobachtungen der Fehler $\frac{\mu}{n}$ anhafte, erhalten, wenn man den Koeffizienten von t^{μ} in der Entwickelung von $(at^p + bt^r + ct^s + \cdots)^n$, welcher die Anzahl der günstigsten Fälle darstellt, durch die Anzahl der möglichen $(a + b + c + \cdots)^n$ dividiert. Jener Koeffizient hat nun die Form

$$M = \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\ldots}\,a^\alpha b^\beta c^\gamma\ldots,$$

wobei

$$\alpha + \beta + \gamma\cdots = n, \qquad \alpha p + \beta q + \gamma r + \cdots = \mu$$

ist, und er muss, dem Verlangten zufolge, kleiner werden, wenn man die Exponenten um eine Einheit ändert, jedoch so, dass beständig $\alpha + \beta + \gamma + \cdots = n$ bleibt. Bringt man beispielsweise $\alpha + 1$, $\beta - 1$, $\gamma, \ldots$ an Stelle von α, β, $\gamma, \ldots$, so geht M über in

$$\frac{\beta}{\alpha+1}\,\frac{aM}{b};$$

nimmt man dagegen $\alpha - 1$, $\beta + 1$, $\gamma, \ldots$ statt α, β, $\gamma, \ldots$ so verwandelt sich M in

$$\frac{\alpha}{\beta+1}\,\frac{bM}{a}$$

und es muss sowohl

$$\frac{\beta}{\alpha+1}\,\frac{a}{b} < 1 \quad \text{als auch} \quad \frac{\alpha}{\beta+1}\,\frac{b}{a} < 1$$

oder

$$\frac{\alpha+1}{\beta} > \frac{a}{b} \quad \text{und} \quad \frac{\alpha}{\beta+1} < \frac{a}{b}.$$

Dies findet aber nur dann statt, wenn $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{a}{b}$. Auf dieselbe Weise findet man $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{a}{c}, \ldots$. Dies im Zusammenhalte mit $\alpha + \beta + \gamma + \cdots = n$ gibt

$$\alpha = \frac{na}{a+b+c+\cdots}, \quad \beta = \frac{nb}{a+b+c+\cdots}, \quad \gamma = \frac{nc}{a+b+c+\cdots}, \ldots$$

Streng genommen sind, wenn die rechten Seiten dieser Gleichungen Brüche vorstellen sollten, für α, β, $\gamma, \ldots$ die nächstliegenden ganzen Zahlen zu nehmen.

Der Fehler des Mittels, welchem die grösste Wahrscheinlichkeit zukommt, wird hiernach

$$\frac{\mu}{n} = \frac{ap + bq + cr + \cdots}{a + b + c + \cdots}$$

sein. Diesen Wert erklärt Lagrange als die Korrektion, welche man an dem Mittel aus mehreren Beobachtungen anzubringen hätte. Sie stellt nichts anderes vor als die Summe der Produkte der verschiedenen Fehler, welchen die einzelne Be-

obachtung unterworfen ist, mit ihren bezüglichen Wahrscheinlichkeiten. Nach einem in der Wahrscheinlichkeitsrechnung üblichen Sprachgebrauche würde man diese Summe als den wahrscheinlichen Wert des Fehlers einer Beobachtung bezeichnen.

Bemerkenswert ist die mechanische Deutung, welche Lagrange dem obigen Resultate gibt. Betrachtet man nämlich die Grössen a, b, c, ... als Gewichte, angebracht an einer Geraden in den Entfernungen p, q, r, ... von einem festen Punkte, so stellt obige Korrektion die Entfernung des Schwerpunktes jener Gewichte von dem festen Punkte vor.

Nimmt man also an, dass jede Beobachtung allen zwischen bestimmten Grenzen liegenden Fehlern unterworfen sei, und dass man die Wahrscheinlichkeitskurve dieser Fehler kennt, so braucht man nur den Schwerpunkt der ganzen Fläche dieser Kurve zu bestimmen und die Abszisse desselben wird die Korrektion des Mittels ausdrücken. Wenn die Kurve symmetrisch ist in Bezug auf die Ordinatenaxe, d. h. wenn positive und negative Fehler gleichen Betrages gleich wahrscheinlich sind, so wird die Abscisse des Schwerpunktes oder die an dem Mittel anzubringende Korrektion gleich Null.

Diese Untersuchungen sind geeignet, die Regel des arithmetischen Mittels vom Standpunkte der Wahrscheinlichkeitsrechnung als ein zweckmässiges Verfahren zur Bestimmung einer unbekannten Grösse aus Beobachtungen zu rechtfertigen, zumal die letzten Beobachtungen, welche sich bis zu der Auffassung eines stetigen Fehlergebietes erheben. Zur Entscheidung der Frage aber, ob das arithmetische Mittel jeder andern Verbindung der Beobachtungen vorzuziehen sei, bringen sie nichts bei, da sie diese Frage gar nicht berühren.

12. Eine andere, ebenfalls auf Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen beruhende Rechtfertigung der Regel des arithmetischen Mittels kann auf eine von Laplace*) gegebene Analyse gegründet werden.

Gesetzt, für die Unbekannte X seien durch Beobachtung

*) Théorie analyt. des Probab., II., art. 18.

die n Werte $l_1, l_2, \ldots l_n$ gefunden worden. Sind $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ die Fehler dieser Beobachtungen, so zwar, dass

$$X = l_1 + \varepsilon_1 = l_2 + \varepsilon_2 = \cdots = l_n + \varepsilon_n,$$

so ist

$$nX = l_1 + l_2 + \cdots + l_n + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots \varepsilon_n.$$

Die betreffende Analyse beschäftigt sich nun mit der Bestimmung der Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der Fehler $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n$ einer gegebenen Grösse gleichkomme. Vorausgesetzt wird dreierlei: 1) Dass die Anzahl n der Beobachtungen sehr gross sei; 2) dass sie alle gleich genau seien, dass also ihre Fehler ein und demselben Gesetze unterliegen; 3) dass dieses Gesetz die Eigenschaft $\varphi(-x) = \varphi(x)$ besitze.

Wir denken uns das Gebiet zwischen den beiden äussersten, entgegengesetzt gleichen Fehlergrenzen in eine sehr grosse Anzahl gleicher Intervalle geteilt; ihre Grösse sei ω, ihre Begrenzung erfolge durch die Beträge

$$-\alpha\omega,\ -(\alpha-1)\omega,\ \cdots -\omega,\ 0,\ \omega,\ \cdots (\alpha-1)\omega,\ \alpha\omega,$$

welche sämtlich Vielfache von ω sind. Die Wahrscheinlichkeit P, dass die Summe der Fehler der n Beobachtungen das ζ-fache von ω sei, genauer ausgedrückt, dass sie zwischen $\zeta\omega$ und $(\zeta+1)\omega$ liege, wird durch den Koeffizienten von $e^{\zeta\Theta\sqrt{-1}}$ in der Entwickelung von

$$\begin{aligned}\Phi = \{&\varphi(-\alpha\omega)\omega e^{-\alpha\Theta\sqrt{-1}} + \varphi(-\overline{\alpha-1}\,\omega)\omega e^{-\overline{\alpha-1}\,\Theta\sqrt{-1}}\\ &+ \cdots + \varphi(0)\omega + \cdots + \varphi(\overline{\alpha-1}\,\omega)\omega e^{\overline{\alpha-1}\,\Theta\sqrt{-1}}\\ &+ \varphi(\alpha\omega)\omega e^{\alpha\Theta\sqrt{-1}}\}^n\end{aligned}$$

um so genauer dargestellt sein, je kleiner ω gemacht wird. Vermöge der Symmetrie hat $e^{-\zeta\Theta\sqrt{-1}}$ denselben Koeffizienten. Wenn man daher diese Entwickelung einmal mit $e^{-\zeta\Theta\sqrt{-1}}d\Theta$, dann mit $e^{\zeta\Theta\sqrt{-1}}d\Theta$ multipliziert, jedesmal in Bezug auf Θ zwischen den Grenzen $-\pi$ und π integriert und von der Bemerkung Gebrauch macht, dass das Integral

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{r\Theta\sqrt{-1}}\,d\Theta$$

Null ist für jeden von Null verschiedenen positiven oder negativen ganzzahligen Wert von r, während es für $r = 0$ gleichkommt 2π, so gibt die Summe der beiden Resultate $4\pi P$; mithin ist

$$P = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Phi d\Theta\,(e^{\zeta\Theta\sqrt{-1}} + e^{-\zeta\Theta\sqrt{-1}}).$$

Vermöge der unter (3) vorausgesetzten Eigenschaft von φ reduziert sich Φ auf

$$\{\varphi(0)\omega + 2\varphi(\omega)\omega\cos\Theta + 2\varphi(2\omega)\omega\cos 2\Theta + \cdots + 2\varphi(\alpha\omega)\omega\cos\alpha\Theta\}^n;$$

entwickelt man das allgemeine Glied der Summe, nämlich

$$2\varphi(\xi\omega)\omega\cos\xi\Theta = 2\varphi(\xi\omega)\omega\left(1 - \frac{\xi^2\Theta^2}{2} + \cdots\right),$$

setzt $\xi\omega = x$, so ist, da die kleinste Änderung von ξ die Einheit ist, $\omega = dx$; gebraucht man ferner die Abkürzungen

$$\int_{-\alpha\omega}^{\alpha\omega} \varphi(x)dx = k, \qquad \int_{-\alpha\omega}^{\alpha\omega} x^2\varphi(x)dx = k'', \ldots$$

und beachtet, dass k die Wahrscheinlichkeit angibt, der Fehler einer Beobachtung liege zwischen den äussersten Fehlergrenzen $-\alpha\omega$ und $\alpha\omega$, und dass es daher der Einheit gleichkommt, so wird

$$\Phi = \left(1 - \frac{\Theta^2}{2\omega^2}k'' + \cdots\right)^n.$$

Führt man dies in den Ausdruck für P ein, so wird

$$P = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(1 - \frac{\Theta^2}{2\omega^2}k'' + \cdots\right)^n d\Theta\cos\zeta\Theta.$$

Wenn n eine sehr grosse Zahl ist, so kann man für $\left(1 - \frac{\Theta^2}{2\omega^2}k'' + \cdots\right)^n$ sehr nahe $e^{-n\frac{\Theta^2}{2\omega^2}k''}$ nehmen, weil

$$l\cdot\left(1 - \frac{\Theta^2}{2\omega^2}k'' + \cdots\right)^n = -n\frac{\Theta^2}{2\omega^2}k'' + \cdots;$$

und setzt man

$$n\frac{\Theta^2}{2\omega^2}k'' = t^2,$$

so geht der obige Ausdruck über in

$$P = \frac{\omega\sqrt{2}}{\pi\sqrt{nk''}} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}\sqrt{\frac{nk''}{2}}} dt\, e^{-t^2} \cos\left(\zeta\omega t\sqrt{\frac{2}{nk''}}\right),$$

dessen obere Grenze im Hinblick auf den unendlich klein gedachten Wert von ω und den grossen Wert von n durch ∞ ersetzt werden kann; nun ist allgemein*)

$$\int_0^\infty dt\, e^{-t^2} \cos rt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{r^2}{4}};$$

folglich ergibt sich als Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Summe der Fehler der n Beobachtungen gleich $\zeta\omega$ sei,

$$P = \frac{\omega}{\sqrt{2\pi nk''}} e^{-\frac{(\zeta\omega)^2}{2nk''}};$$

oder, indem man $\zeta\omega = z$, $\omega = dz$ setzt, die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der Fehler zwischen z und $z + dz$ liege,

$$P = \frac{1}{\sqrt{2\pi nk''}} e^{-\frac{z^2}{2nk''}} dz.$$

Sie wird am grössten für $z = 0$; mithin ist es wahrscheinlicher, dass die Summe $l_1 + l_2 + \cdots + l_n + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n$ gleich sei $l_1 + l_2 + \cdots + l_n$, als dass sie einen hiervon um irgend einen Betrag abweichenden Wert besitze. Jene Summe ist aber der Ausdruck für nX; folglich ist es wahrscheinlicher, dass X dem Mittel $\frac{l_1 + l_2 + \cdots + l_n}{n}$ gleich sei, als dass es sich um irgend einen Betrag von ihm unterscheide. Ob es aber nicht etwa eine Verbindung der Beobachtungen gebe, welcher X mit noch grösserer Wahrscheinlichkeit gleichkommt, kann die obige Untersuchung nicht entscheiden. Es darf auch nicht übersehen werden, dass die Analyse für eine sehr grosse Anzahl von Beobachtungen geführt worden ist; auf eine Beobachtungsreihe von nur mässiger Ausdehnung lassen sich ihre Resultate nicht übertragen.

---

*) Vergl. Anmerkung zu 38.

13. Die zuletzt gemachten Bemerkungen finden sich bei Ellis*) weiter ausgeführt. Dass das arithmetische Mittel gewiss mit dem wahren Werte zusammenfalle, sucht er durch folgendes Raisonnement zu begründen. Es sei X der wahre, l der beobachtete Wert, ε der Fehler; dann bestehen die Gleichungen

$$X - l_1 = \varepsilon_1$$
$$X - l_2 = \varepsilon_2$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

aus welchen sich durch Summierung

$$[X - l] = [\varepsilon] = 0$$

und somit

$$X = \frac{[l]}{n}$$

ergibt, weil, wenn keine permanente Ursache vorhanden ist, welche die Summe der positiven Fehler verschieden machte von der Summe der negativen, mit beständig wachsendem n immer mehr und mehr $[\varepsilon] = 0$ wird. Nun fügt Ellis gleich hinzu, dass gerade dieselben Erwägungen zeigen würden, dass $[f(\varepsilon)] = 0$, wenn f irgend eine ungerade Funktion bedeutet, wodurch man zur Bestimmung von X die Gleichung erhielte: $[f(X - l)] = 0$.

An der Grenze, so bemerkt Ellis, sind beide Resultate richtig, für ein endliches n keines von beiden, und wenn man von der Bequemlichkeit der Rechnung absieht, gebe es keinen zureichenden Grund, warum man aus der grossen Zahl der Regeln, welche in der allgemeinen Gleichung $[f(X - l)] = 0$ enthalten sind, gerade diejenige des arithmetischen Mittels herausgreifen sollte. Dass aber, wenn es sich um Feststellung der Wahrheit handelt, die Einfachheit und Bequemlichkeit der Rechnung nicht ausschlaggebend sein darf, hat Tait**) durch ein treffliches Beispiel beleuchtet; er sagt, die Wahl des arithmetischen Mittels unter den vielen andern Regeln sei damit zu vergleichen, wenn

---

*) On the Method of Least Squares, Cambridge Philos. Transact. 1844, vol. VIII, pag. 205.

**) On the Law of Frequency of Error, Edinburgh Transact., vol. XXIV, pag. 140.

ein Rechner die allgemeine Massenanziehung direkt proportional der Entfernung setzte, statt umgekehrt ihrem Quadrat aus dem Grunde, weil dadurch das Problem der drei Körper einfach und seine Lösung exakt wird, während sie sonst kompliziert und nur angenähert ist.

Allerdings scheint es, wie Glaisher*) bemerkt hat, als ob die Gleichungen $[X - l] = 0$ und $[f(X - l)] = 0$ zusammenfielen, wenn die bei den Beobachtungen zu befürchtenden Fehler sehr klein sind, weil man dann in der Entwickelung $f(\varepsilon) = A\varepsilon + B\varepsilon^3 + \cdots$ bei dem ersten Gliede stehen bleiben kann; dieser Schluss wird aber hinfällig, sobald $A = 0$ ist; denn dann kommt man zu der Gleichung $[(X - l)^3] = 0$ oder auch $[(X - l)^5] = 0 \ldots$, wenn auch noch $B = 0 \ldots$ ist.

14. Wesentlich anderer Natur sind die Untersuchungen über die Regel des arithmetischen Mittels, mit welchen wir uns jetzt beschäftigen wollen. Hier handelt es sich darum, auf Grund von Voraussetzungen, welche aus der Natur der Sache geschöpft werden, das arithmetische Mittel als diejenige Verbindung der Beobachtungen zu erweisen, welche allen andern Verbindungen vorzuziehen ist.

Der erste beachtenswerte Versuch dieser Art rührt von Encke**) her. Er stützt sich auf zwei Voraussetzungen: 1) Positive und negative Fehler von gleichem absoluten Betrage sind gleich wahrscheinlich; 2) bei mehr als zwei Beobachtungen muss es möglich sein, dasselbe Endresultat zu erhalten, ob man die einzelnen Beobachtungen selbst kennt oder nur die Resultate, welche aus beliebigen Verbindungen der einzelnen Beobachtungen nach richtigen Prinzipien abgeleitet sind. Eine dritte Voraussetzung wird, ohne jedoch als eine solche ausdrücklich bezeichnet zu werden, im Laufe des Beweises gemacht.

---

*) On the Law of Errors of Observations and on the Meth. of Least Squares, Mem. of the R. Astron. Soc. 1872, vol. XXXIX, pag. 88.

**) Über die Begründung der Methode der kleinsten Quadrate, Abhandlg. der Berliner Akad. für das Jahr 1831, pag. 73 flg. Siehe auch Berliner Astron. Jahrb. 1834, pag. 260 flg. — Hierzu die Bemerkungen Reuschle's, Crelle's Journ. 26, pag. 353 und Encke's Gegenbemerkungen, ibid. 27, pag. 220.

Aus der ersten Voraussetzung folgt, dass der aus zwei gleich genauen Beobachtungen a, b einer Grösse für diese vorzugsweise zu wählende Wert das arithmetische Mittel

$$x = \frac{a+b}{2}$$

sei. In der That ist diese Annahme die einzige, welche mit jener Voraussetzung und der gleichen Genauigkeit beider Beobachtungen im Einklange steht*).

Sind drei Beobachtungen ausgeführt worden, welche für die unbekannte Grösse die Werte a, b, c ergeben haben, so kann man aus ihrer gleichen Genauigkeit zunächst nur den Schluss ziehen, dass der zu wählende Wert x eine symmetrische Funktion von a, b, c werde sein müssen (dritte Annahme). Kennte man statt der drei Einzelwerte das aus irgend zweien nach der obigen Regel abgeleitete Resultat und den dritten, also

---

*) Übrigens lässt sich unter Festhaltung der Annahme 1) ein strenger Beweis führen, dass das arithmetische Mittel aus zwei Beobachtungen von gleicher Genauigkeit der wahrscheinlichste Wert der beobachteten Grösse sei (s. 7). Heissen die Beobachtungsergebnisse wie oben a, b, so ist wahrscheinlichster Wert x derjenige, für den

$$\Omega = \varphi(x-a)\,\varphi(x-b)$$

ein Minimum wird, und die Bedingung dieses Minimums lautet

$$\frac{\varphi'(x-a)}{\varphi(x-a)} + \frac{\varphi'(x-b)}{\varphi(x-b)} = 0.$$

Da φ eine gerade, so ist φ' eine ungerade Funktion und mit Rücksicht darauf kann man auch schreiben

$$\frac{\varphi'(x-a)}{\varphi(x-a)} - \frac{\varphi'(b-x)}{\varphi(b-x)} = 0.$$

Und diese Gleichung wird in der That durch die Substitution $x = \frac{a+b}{2}$ in eine identische,

$$\frac{\varphi'\left(\frac{b-a}{2}\right)}{\varphi\left(\frac{b-a}{2}\right)} - \frac{\varphi'\left(\frac{b-a}{2}\right)}{\varphi\left(\frac{b-a}{2}\right)} = 0$$

verwandelt. — Vgl. Glaisher, Mem. of the R. Astron. Soc., vol. XXXIX, pag. 92 und De Tilly, Nouv. Corresp. Mathém., I, pag. 143 flg.

$$\frac{b+c}{2},\ a$$

oder

$$\frac{c+a}{2},\ b$$

oder

$$\frac{a+b}{2},\ c,$$

so muss es, der dritten Voraussetzung gemäss, eine für alle drei Paare gleich bleibende Verbindung geben, welche dasselbe Resultat liefert wie die drei Einzelwerte; bezeichnet man diese Verbindung durch die Charakteristik ψ, so wird also

$$x = \psi\left(\frac{b+c}{2},\ a\right)$$
$$= \psi\left(\frac{c+a}{2},\ b\right)$$
$$= \psi\left(\frac{a+b}{2},\ c\right).$$

Soll aber jeder dieser drei Ausdrücke eine symmetrische Funktion von a, b, c sein, so muss die einzelstehende Grösse a, respektive b, c mit den beiden andern in eben derselben Weise verbunden sein wie diese unter einander verbunden sind, nämlich durch einfache Summierung. Daraus folgt mit Notwendigkeit, dass der Ausdruck für x eine Funktion des Aggregats $a + b + c$ sein müsse, etwa

$$x = \chi(a + b + c).$$

Die Form dieser Funktion aber ergibt sich aus dem speziellen Falle $a = b = c$; hier muss notwendig $x = a$, also

$$a = \chi(3a)$$

werden; χ bedeutet also Division durch 3, so dass

$$x = \frac{a+b+c}{3}$$

sich ergibt.

Wenn nun allgemein für n Beobachtungen der zu wählende Wert

$$x = \frac{a+b+\cdots+p}{n}$$

ist, so wird, wenn noch eine Beobachtung q hinzukommt, auch für $n + 1$ Beobachtungen

$$x' = \frac{a + b + \cdots + p + q}{n + 1}$$

zu nehmen sein; denn man kann x' auch aus x und q ableiten, so dass

$$x' = f\left(\frac{a + b + \cdots + p}{n}, q\right),$$

und da dies wegen der vorausgesetzten gleichen Genauigkeit der Beobachtungen eine symmetrische Funktion von $a, b \ldots p, q$ sein muss, so führen die nämlichen Schlüsse wie oben zu dem arithmetischen Mittel dieser Grössen. Die Giltigkeit der Regel ist für drei Beobachtungen erwiesen, somit besteht sie auch für jede beliebige Anzahl.

Während von einer Seite, von Glaisher*), gegen diese Beweisführung Bedenken erhoben worden sind, wurde sie von anderer Seite, von Chauvenet**), als einwurfsfrei und völlig befriedigend bezeichnet. Bezüglich der Voraussetzung 2) muss man indessen Glaisher's ablehnendem Urteil zustimmen.

15. Einen, vom mathematischen Standpunkte wenigstens, beachtenswerten Beweis für die Regel des arithmetischen Mittels hat Schiaparelli***) gegeben. Derselbe ruht auf folgenden Annahmen: 1) Das zu wählende Resultat muss unabhängig sein von der Einheit, in welcher die Beobachtungen ausgedrückt sind; 2) seine Stellung unter den Beobachtungen muss unabhängig von der Wahl des Nullpunktes für die Zählung dieser letzteren sein, analytisch gesprochen: wenn man zu allen Beobachtungen eine beliebige aber bestimmte Grösse hinzufügt, so muss auch das zu wählende

---

*) l. c., pag. 86 flg.

**) A Treatise on the Meth. of Least Squares, oder auch im Manual of Spheric. and Practic. Astronomy, Bd. II.

***) Astron. Nachr., Bd. 87, No. 2068 (vergl. auch Rendiconti Ist. Lomb., I, pag. 771 flg.). — Hierzu die Bemerkg. Stone's, ibid. Bd. 88, No. 2092 und Schiaparelli's Gegenbemerkg., ibid. No. 2097, welche die Priorität in Bezug auf den dritten Teil des Beweises betreffen. — In Grunert's Arch., Teil 11, hat Matzka einen Beweis geliefert, welcher von der Annahme 2) des obigen ausgeht und auch in anderen Punkten einen ähnlichen Gedankengang verfolgt; die mathematische Formulierung ist aber weniger streng und einfach.

Resultat um dieselbe Grösse verändert sein; 3) wenn man einer der Beobachtungen eine Änderung erteilt, so muss die dadurch hervorgebrachte Änderung des Resultats dieselbe bleiben, welcher von den Beobachtungen man die Änderung erteilt haben mag.

Sind also $a_1, a_2, \ldots a_n$ die Beobachtungsergebnisse, $x = F(a_1, a_2, \ldots a_n)$ der auf ihrer Grundlage für die unbekannte Grösse zu wählende Wert, so fordert die erste Annahme, dass F eine homogene Funktion der Argumente $a_1, a_2, \ldots a_n$ vom Homogeneitätsgrade 1 sei; auf Grund des Euler'schen Satzes über diese Gattung von Funktionen ist dann

$$\frac{\partial F}{\partial a_1} a_1 + \frac{\partial F}{\partial a_2} a_2 + \cdots + \frac{\partial F}{\partial a_n} a_n = F = x. \tag{1}$$

Die zweite Annahme führt, wenn die zu den Beobachtungen hinzugefügte Grösse mit α bezeichnet wird, auf die Gleichung

$$x + \alpha = F(a_1 + \alpha, a_2 + \alpha, \ldots a_n + \alpha);$$

wenn man ihre rechte Seite mit Hilfe des Taylor'schen Satzes nach Potenzen von α entwickelt, so geht sie über in

$$\alpha = \left(\frac{\partial F}{\partial a_1} + \frac{\partial F}{\partial a_2} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial a_n}\right) \alpha + \cdots,$$

und da sie für beliebige Werte von α gelten muss, so schliesst man, dass

$$\frac{\partial F}{\partial a_1} + \frac{\partial F}{\partial a_2} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial a_n} = 1. \tag{2}$$

Die dritte Voraussetzung entspringt aus der Forderung, dass alle Beobachtungen vermöge ihrer gleichen Genauigkeit in gleicher Weise an der Hervorbringung des Resultates mitzuwirken haben, so dass ein Fehler, welcher Beobachtung er auch anhaftet, immer denselben Einfluss auf das Resultat üben muss. Wird die sehr klein gedachte Änderung ε nach und nach den einzelnen Beobachtungen erteilt, so können die daraus erwachsenen Änderungen von x durch

$$\frac{\partial F}{\partial a_1} \varepsilon, \ \frac{\partial F}{\partial a_2} \varepsilon, \cdots \frac{\partial F}{\partial a_n} \varepsilon$$

dargestellt werden; ihre Gleichheit erfordert, dass

$$\frac{\partial F}{\partial a_1} = \frac{\partial F}{\partial a_2} = \cdots = \frac{\partial F}{\partial a_n}. \tag{3}$$

Die Gleichungen (1), (2), (3) bestimmen die Funktion F vollständig. Denn aus (2) und (3) folgt

$$\frac{\partial F}{\partial a_1} = \frac{\partial F}{\partial a_2} = \cdots = \frac{\partial F}{\partial a_n} = \frac{1}{n},$$

und (1) gibt hiermit

$$x = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

16. Zwischen den Beweisen von Encke und Schiaparelli nimmt der von Stone*) gegebene eine Mittelstellung ein, insofern er eine der beiden Voraussetzungen, auf denen er ruht, mit dem ersten und die andere mit dem zweiten gemein hat. Diese Voraussetzungen lauten: 1) Das aus mehreren gleich guten Beobachtungen zu wählende Resultat muss so gebildet sein, dass jede einzelne Beobachtung in gleicher Weise zu demselben beiträgt, d. h. die Beobachtungen sind so mit einander zu kombinieren, dass ein Fehler oder eine beliebige Änderung, welche einer Beobachtung zugeschrieben wird, in dem Resultate den nämlichen Fehler oder die nämliche Änderung hervorbringt, auf welche Beobachtung sich der Fehler oder die Änderung beziehen mag; 2) das aus zwei gleich guten Beobachtungen vorzugsweise zu wählende Resultat ist deren arithmetisches Mittel.

Es seien $a_1, a_2, \ldots a_n$ die Beobachtungsergebnisse, $x = F(a_1, a_2, \ldots a_n)$ der zu wählende Wert der beobachteten Grösse. Erteilt man nach und nach den einzelnen Beobachtungen die beliebige Änderung ε, so lassen sich die Änderungen, welche in x erzeugt werden, darstellen durch

$$\begin{array}{l}
\frac{\partial F}{\partial a_1}\varepsilon + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial a_1^2}\varepsilon^2 + \cdots \\
\frac{\partial F}{\partial a_2}\varepsilon + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial a_2^2}\varepsilon^2 + \cdots \\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\
\frac{\partial F}{\partial a_n}\varepsilon + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial a_n^2}\varepsilon^2 + \cdots;
\end{array}$$

*) Monthly Not. of the R. Astron. Soc., vol. XXXIII, pag. 570. — Vergl. Art. 15.

vermöge der ersten Voraussetzung sollen sie für jeden beliebigen Wert von ε einander gleich sein; dies ergibt folgende Beziehungen zwischen den partiellen Differentialquotienten von F:

$$\frac{\partial F}{\partial a_1} = \frac{\partial F}{\partial a_2} = \cdots = \frac{\partial F}{\partial a_n}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial a_1^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial a_2^2} = \cdots = \frac{\partial^2 F}{\partial a_n^2},$$

aus welchen sich die weiteren ergeben:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial a_1 \partial a_2} = \frac{\partial^2 F}{\partial a_1 \partial a_3} = \cdots = \frac{\partial^2 F}{\partial a_1^2} = \cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial^{p+q} F}{\partial a_1^p \partial a_2^q} = \frac{\partial^{p+q} F}{\partial a_1^{p+q}} = \cdots$$

Setzt man $a_1 = \alpha_1 + \lambda_1$, $a_2 = \alpha_2 + \lambda_2$, $\cdots a_n = \alpha_n + \lambda_n$, so geht die nach Potenzen der λ fortschreitende Entwickelung von $F(a_1, a_2, \ldots a_n)$, nämlich

$$x = F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n) + \left(\frac{\partial}{\partial a_1}\lambda_1 + \frac{\partial}{\partial a_2}\lambda_2 + \cdots\right) F$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial a_1}\lambda_1 + \frac{\partial}{\partial a_2}\lambda_2 + \cdots\right)^2 F + \cdots$$
$$+ \frac{1}{r!}\left(\frac{\partial}{\partial a_1}\lambda_1 + \frac{\partial}{\partial a_2}\lambda_2 + \cdots\right)^r F(\alpha_1 + \Theta\lambda_1, \alpha_2 + \Theta\lambda_2, \cdots)$$

zufolge der obigen Beziehungen über in

$$x = F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n) + (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots \lambda_n)\frac{\partial F}{\partial a_1}$$
$$+ \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial a_1^2} + \cdots$$
$$+ \frac{1}{r!}(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)^r \frac{\partial^r}{\partial a_1^r} F(\alpha_1 + \Theta\lambda_1, \alpha_2 + \Theta\lambda_2, \cdots);$$

wählt man aber

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = \alpha = \frac{a_1 + a_2 + \cdots a_n}{n},$$

so wird

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 0,$$

daher

$$x = F(\alpha, \alpha, \ldots \alpha) = f(\alpha);$$

es muss also x eine Funktion des arithmetischen Mittels sein, wenn wirklich die einzelnen Beobachtungen in gleicher Weise zur Bildung dieses Wertes beitragen sollen.

Sind blos zwei Beobachtungen, a_1 und a_2, vorhanden, so ist vermöge der zweiten Voraussetzung $x = \frac{a_1 + a_2}{2}$, also für $n = 2$

$$f\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right) = \frac{a_1 + a_2}{2} \qquad \text{oder} \qquad f(\alpha) = \alpha.$$

Angenommen, diese Beziehung gelte schon für n Beobachtungen, so dass

$$f\left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right) = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \quad \text{oder } f(\alpha) = \alpha;$$

kommt nun eine neue Beobachtung a_{n+1} hinzu, so ist

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1}}{n+1} = \frac{n\alpha + a_{n+1}}{n+1} = \alpha + \frac{a_{n+1} - \alpha}{n+1}$$

und die Taylor'sche Entwickelung gibt

$$f\left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n+1}}{n+1}\right) = f(\alpha) + \frac{a_{n+1} - \alpha}{n+1} f'(\alpha)$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{a_{n+1} - \alpha}{n+1}\right)^2 f''(\alpha) + \cdots;$$

da aber

$$f(\alpha) = \alpha, \qquad \text{so ist} \qquad f'(\alpha) = 1,\ f''(\alpha) = 0,\ \ldots,$$

somit

$$f\left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n+1}}{n+1}\right) = \alpha + \frac{a_{n+1} - \alpha}{n+1} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n+1}}{n+1}.$$

Gilt also jene Beziehung für n, so besteht sie auch für $n + 1$ zu recht. Nun ist für $n = 2$ ihre Giltigkeit angenommen worden; durch Induktion ergibt sie sich daher für jede beliebige Anzahl von Beobachtungen.

Der Umstand, dass Stone's Beweis mit zwei Voraussetzungen sein Auslangen findet, verleiht ihm einen gewissen Vorzug vor den beiden früheren.

17. Zwei Eigenschaften des arithmetischen Mittels sind geeignet, den Anknüpfungspunkt für eine allgemeinere und zugleich tiefer gehende Auffassung des Gegenstandes abzugeben; dasselbe ist erstens eine symmetrische Funktion der

Elemente und fällt zweitens, wenn diese unter einander gleich werden, mit ihrem gemeinschaftlichen Werte zusammen.

Man kann diese zwei Eigenschaften füglich als Postulate hinstellen, welchen der aus einer Anzahl unter völlig gleichen Umständen angestellter Beobachtungen für die beobachtete Grösse zu konstruierende, sagen wir ihr wahrscheinlichster Wert, genügen muss.

Denn fürs erste, nach dem Stande unserer Kenntnisse über die bei den Beobachtungen obwaltenden Umstände liegt kein Grund vor, die eine der andern vorzuziehen, weil wir kein anderes unterscheidendes Merkmal anzugeben vermögen als die Zeit, zu welcher jede einzelne gemacht worden ist; daher besteht auch kein Grund, warum sie bei der Bildung des gesuchten Wertes in verschiedener Weise in Rechnung kommen sollten.

So lange, zweitens, nur eine Beobachtung vorliegt, stellt sie zweifellos den wahrscheinlichsten Wert der Unbekannten vor; kommt eine zweite mit der ersten übereinstimmende Beobachtung hinzu, so gilt bezüglich des gemeinsamen Wertes beider Beobachtungen das Nämliche und sogar in verstärktem Maasse, weil für dieselbe Thatsache nun zwei gleich gewichtige übereinstimmende Zeugnisse vorliegen u. s. w.

Bezeichnen $l_1, l_2, \ldots l_n$ die Beobachtungen und $F(l_1, l_2 \ldots l_n)$ den wahrscheinlichsten Wert, welcher für die beobachtete Grösse aus ihnen abgeleitet werden kann, so ist es in der Natur der Sache begründet, dass F eine eindeutige und zwischen den Grenzen der Beobachtungen stetige Funktion sein muss. Denn zu jedem innerhalb dieser Grenzen befindlichen Wertsystem $l_1, l_2, \ldots l_n$ gibt es notwendig einen bestimmten Wert, welcher als der wahrscheinlichste Wert der beobachteten Grösse zu gelten hat. Ebenso ist es klar, dass dieser mit den Beobachtungen stetig sich ändern werde.

Unter den Funktionen, welche symmetrisch sind in Bezug auf die Elemente

$$l_1, l_2, \ldots l_n \text{ und für } l_1 = l_2 = \cdots = l_n = l$$

auf l sich reduzieren, können also nur diejenigen in Betracht kommen, welche innerhalb der Grenzen der Beobachtung

eindeutig und stetig sind*). Solcher aber gibt es eine ganze Klasse, sie mögen mit dem Namen der Mittelwerte belegt werden. Es bietet sich nun die Frage dar: Welches Verhalten zeigen die Mittelwerte unter einander und welche Stellung nimmt das arithmetische Mittel unter ihnen ein**).

18. Betrachtet man die einzelnen l als variabel und erteilt ihnen ein System von Änderungen $dl_1, dl_2, \ldots dl_n$, so wird die Änderung von F

$$dF = \frac{\partial F}{\partial l_1} dl_1 + \frac{\partial F}{\partial l_2} dl_2 + \cdots + \frac{\partial F}{\partial l_n} dl_n$$

sein; für $l_1 = l_2 = \cdots = l_n = l$ wird $F = l$ und

$$dl_1 = dl_2 = \cdots = dl_n = dl,$$

und vermöge der Symmetrie von F

$$\frac{\partial F}{\partial l_1} = \frac{\partial F}{\partial l_2} = \cdots = \frac{\partial F}{\partial l_n} = P,$$

folglich

$$dF = nP\,dl;$$

andererseits ist

$$F(l + dl,\ l + dl, \cdots) = F + dF = l + dl,$$

daher $dF = dl$ und somit

$$P = \frac{1}{n}.$$

Dies also ist der gemeinschaftliche Wert der partiellen Differentialquotienten von F in Bezug auf die einzelnen l, wenn diese unter einander gleich sind. Sind sie dies nicht, so kann man den genannten Differentialquotienten die Form geben

---

*) Beispielsweise ist $F(l_1, l_2) = \frac{l_1 + l_2}{2} + \alpha \sqrt{\frac{(l_1 - l_2)^2}{(\beta l_1 - l_2)(\beta l_2 - l_1)}}$, wo α, β $(\lesseqgtr 1)$ beliebige Konstante bedeuten und die Quadratwurzel als zweideutige Grösse aufgefasst wird, eine Funktion, welche zwar die zwei ersten, nicht aber die beiden letzten Eigenschaften aufweist.

**) Diese Auffassung ist 1864 durch De Morgan begründet worden: On the Theory of Errors of Observations, Cambridge Philos. Transact., X, pag. 416 flg. und findet sich in weiterer Ausführung wieder bei Ferrero: Esposizione del metodo dei minimi quadrati, 1876. pag. 7 flg. — Vgl. über die angezogene Stelle des letzteren Werkes eine Note von Ch. S. Peirce, Americ. J. of Mathem., I, pag. 59 flg.

$$\frac{\partial F}{\partial l_1} = \frac{1+\alpha_1}{n}, \quad \frac{\partial F}{\partial l_2} = \frac{1+\alpha_2}{n}, \ldots \frac{\partial F}{\partial l_n} = \frac{1+\alpha_n}{n},$$

und da die Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ sämtlich gegen Null konvergieren, wenn die $l_1, l_2, \ldots l_n$ dem Zustande der Gleichheit sich nähern, so werden sie, sobald die Beobachtungen einen genügenden Grad der Übereinstimmung zeigen, dem absoluten Werte nach durchweg kleiner als die Einheit, die partiellen Differentialquotienten also durchweg positiv werden. Dann aber ist F eine mit den Elementen wachsende Funktion, so dass, wenn l_k das kleinste, l_g das grösste unter ihnen ist, notwendig

$$l_k < F(l_1, l_2, \ldots) < l_g.$$

Bei hinreichend übereinstimmenden Beobachtungen liegt also jeder Mittelwert zwischen dem kleinsten und grössten Beobachtungsergebnis; dies rechtfertigt seinen Namen.

19. Wir setzen

$$l_1 = a + \delta_1, \quad l_2 = a + \delta_2, \ \ldots \ l_n = a + \delta_n,$$

wobei a eine beliebig angenommene Grösse ist. Entwickelt man nun $F(a + \delta_1, \ a + \delta_2, \ \ldots \ a + \delta_n)$ nach dem Taylor'schen Satze, so ist dabei zweierlei zu bemerken: es ist $F(a, a, \ldots a) = a$ und die in die Entwickelung eintretenden Werte der Differentialquotienten gleicher Ordnung und Art werden vermöge der Symmetrie von F unter einander gleich, nämlich

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{\partial F}{\partial l_1} = \dfrac{\partial F}{\partial l_2} = \cdots = P, \\[2ex]
\dfrac{\partial^2 F}{\partial l_1^2} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial l_2^2} = \cdots = Q \\[2ex]
\dfrac{\partial^2 F}{\partial l_1 \partial l_2} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial l_1 \partial l_3} = \cdots = R \\[2ex]
\dfrac{\partial^3 F}{\partial l_1^3} = \dfrac{\partial^3 F}{\partial l_2^3} = \cdots = S \\[2ex]
\dfrac{\partial^3 F}{\partial l_1^2 \partial l_2} = \dfrac{\partial^3 F}{\partial l_1^2 \partial l_3} = \cdots = T \\[2ex]
\dfrac{\partial^3 F}{\partial l_1 \partial l_2 \partial l_3} = \dfrac{\partial^3 F}{\partial l_1 \partial l_2 \partial l_4} = \cdots = U \\[1ex]
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\[1ex]
\dfrac{\partial^r F}{\partial l_p^\mu \partial l_q^\nu \cdots} = \dfrac{\partial^r F}{\partial l_{p'}^\mu \partial l_{q'}^\nu \cdots} = \cdots.
\end{array}\right\} \text{für } l_1 = l_2 = \cdots = a.$$

Die Entwickelung nimmt in Folge dessen folgende Gestalt an:

$$(1)\quad F(l_1, l_2, \ldots l_n) = a + P[\delta] + \frac{1}{2}(Q[\delta^2] + R[\delta_i \delta_{i'}])$$
$$+ \frac{1}{6}(S[\delta^3] + T[\delta_i^2 \delta_{i'}] + U[\delta_i \delta_{i'} \delta_{i''}]) + \cdots,$$

wobei i, i', i'' verschiedene Suffixe aus der Reihe $1, 2, \ldots n$ sind.

Für $\delta_1 = \delta_2 = \cdots = \delta_n = \delta$ reduziert sich die rechte Seite notwendig auf $a + \delta$; daher ist, wenn man die Gliederanzahl jeder Summe berücksichtigt,

$$nP = 1, \quad Q + (n-1)R = 0,$$
$$S + (n-1)\,T + (n-1)(n-2)\,U = 0, \ldots$$

Hieraus folgt zunächst, wie im vorigen Artikel bereits gezeigt worden, $P = \frac{1}{n}$, so dass die zwei ersten Glieder der rechten Seite von (1) sich zu $\frac{na + [\delta]}{n}$ oder $\frac{[l]}{n}$ vereinigen; in Folge dessen wird

$$(2)\quad F(l_1, l_2, \ldots l_n) = \frac{[l]}{n} + \frac{1}{2}(Q[\delta^2] + R[\delta_i \delta_{i'}])$$
$$+ \frac{1}{6}(S[\delta^3] + T[\delta_i^2 \delta_{i'}] + U[\delta_i \delta_{i'} \delta_{i''}]) + \cdots,$$

darin sind Q, R, S, T, $U \ldots$ Grössen, deren Wert von der Natur der Funktion F, von dem Wert a und von der Anzahl n der Beobachtungen abhängt.

Hiernach erscheint jeder Mittelwert darstellbar als Summe aus dem arithmetischen Mittel und einem Aggregat, über welches a priori keine Auskunft, weder dem Vorzeichen noch dem Absolutwert nach zu geben noch zu erlangen ist; „es ist daher kein Grund vorhanden, anzunehmen, der Wert von $F(l_1, l_2, \ldots l_n)$ liege auf der einen Seite des arithmetischen Mittels eher als auf der anderen, und es muss daher dieses arithmetische Mittel als der wahrscheinlichste Wert a priori angenommen werden“ *).

So bestechend diese Schlussweise ist, bei genauer Prüfung hält sie doch nicht Stand**). In Artikel 8 ist beispiels-

---

*) De Morgan, l. c.

**) Glaisher, Mem. of the R. Astron. Soc., XXXIX, pag. 91.

weise die Gleichung $[X - l] = [\varepsilon]$ aufgestellt worden, in welcher X den wahren Wert der beobachteten Grösse und die ε somit die wahren Beobachtungsfehler vorstellen. Man könnte ebenso schliessen: Weil über $[\varepsilon]$ a priori nichts bekannt ist und nichts gefunden werden kann, so existiert kein Grund, warum $[\varepsilon]$ eher positiv als negativ sein sollte; die wahrscheinlichste Form der obigen Gleichung ist also $[X - l] = 0$ und der wahrscheinlichste Wert von X das arithmetische Mittel $\frac{[l]}{n}$. Aber ganz die nämlichen Schlüsse dürften dann auf eine der Gleichungen

$$[(X - l)^3] = [\varepsilon^3], \quad [(X - l)^5] = [\varepsilon^5], \ldots$$

angewandt werden.

Glaisher hat die Bedenklichkeit des obigen Schlusses durch ein treffliches Beispiel illustriert. Wenn jemand sagt, ein Punkt liege auf einer Geraden irgendwo zwischen zwei gegebenen Punkten α und β, so hat man sicherlich keinen Anhalt dafür, den Mittelpunkt von $\alpha\beta$ für eine wahrscheinlichere Lage des Punktes zu erklären als irgend einen anderen Punkt der Strecke. In dem Falle, welchen wir betrachten, liegen die Verhältnisse ähnlich wie in diesem Beispiele. Durch De Morgan's Deduktion ist wohl der bemerkenswerte Satz bewiesen, dass das arithmetische Mittel nicht blos einen Mittelwert der Beobachtungen, sondern auch eine mittlere unter den unendlich vielen möglichen Annahmen über die Bildung des gesuchten Wertes darstelle; dass es aber der wahrscheinlichste oder auch nur vorzugsweise zu wählende Wert sei, kann aus ihr nicht geschlossen werden.

20. Ganz treffend sind die Schlüsse, zu welchen Ferrero gelangt ist. Seine Darstellung unterscheidet sich von der allgemeinen dadurch, dass für a das arithmetische Mittel der Beobachtungen genommen wird; dadurch gehen die δ in die negativ genommenen Werte der Abweichungen der einzelnen Beobachtungen von ihrem arithmetischen Mittel über, die wir mit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ bezeichnen, und die Entwickelung (1) oder (2) des vorigen Artikels lautet nun

$$(3)\quad F(l_1, l_2, \ldots l_n) = \frac{[l]}{n} + \frac{1}{2}(Q[\lambda^2] + R[\lambda_i\lambda_{i'}])$$
$$-\frac{1}{6}(S[\lambda^3] + T[\lambda_i^2\lambda_{i'}] + U[\lambda_i\lambda_{i'}\lambda_{i''}]) + \cdots$$

Vorausgesetzt, dass man es mit guten Beobachtungen zu thun habe, so werden dieselben sowohl unter einander als vom arithmetischen Mittel nur um geringe Beträge abweichen und man kann die Entwickelung auf Glieder von der zweiten Ordnung beschränken; bemerkt man ferner, dass wegen $[\lambda] = 0$ auch $[\lambda^2] + [\lambda_i\lambda_{i'}] = 0$ ist, so kommt

$$(4)\qquad F(l_1, l_2, \ldots l_n) = \frac{[l]}{n} + \frac{Q-R}{2}[\lambda\lambda].$$

Von Interesse ist das zweite Glied der rechten Seite, und in diesem zunächst wieder der Koeffizient $\frac{Q-R}{2}$ von $[\lambda\lambda]$, der von F und $a = \frac{[l]}{n}$ abhängt; es ist beispielsweise für

$$F = \sqrt[n]{l_2\ l_2\ \ldots\ l_n} \qquad \frac{Q-R}{2} = -\frac{1}{2na}$$

$$F = \sqrt{\frac{l_1^2 + l_2^2 + \cdots + l_n^2}{n}} \qquad \frac{Q-R}{2} = \frac{1}{2na}$$

$$F = \sqrt[m]{\frac{l_1^m + l_2^m + \cdots + l_n^m}{n}} \qquad \frac{Q-R}{2} = \frac{m-1}{2na}$$

$$F = \sqrt{\frac{l_1 l_2 + l_1 l_3 + \cdots + l_{n-1} l_n}{\frac{1}{2}n(n-1)}} \qquad \frac{Q-R}{2} = \frac{1}{n(n-1)a}$$

u. s. f.

Setzt man $n\frac{Q-R}{2} = k$, so zeigen diese Beispiele und eine eingehendere Untersuchung bestätigt es, dass k niemals eine mit n wachsende Grösse bedeutet; mit dieser Abkürzung schreibt sich

$$(5)\qquad F(l_1, l_2, \ldots l_n) = \frac{[l]}{n} + k\frac{[\lambda\lambda]}{n}.$$

Je kleiner also $\frac{[\lambda\lambda]}{n}$, um so kleiner ist der Unterschied zwischen einem beliebigen Mittelwert und dem arithmetischen Mittel; da nun angenommen wurde, dass der wahrscheinlichste Wert unter den Mittelwerten sich befinden müsse, so zeigt die näherungsweise Übereinstimmung aller Mittel-

werte mit dem arithmetischen Mittel an, dass man sich durch Wahl des letzteren nur wenig von dem wahrscheinlichsten Werte entfernt und zwar um so weniger, je besser die Beobachtungen sind.

21. So lange man bei den zwei Postulaten, welche an die Natur der Funktion F bisher gestellt worden sind, stehen bleibt, ist das arithmetische Mittel vor den anderen Mittelwerten nur dadurch ausgezeichnet, dass es die gemeinsame Grenze bildet, welcher sich diese nähern, wenn die Beobachtungen an Übereinstimmung unter einander gewinnen. Durch Hinzufügung neuer Bedingungen kann es aber auch als der einzige unter den Mittelwerten zu wählende Wert hervorgehen. Ferrero*) hat in eleganter Weise dargethan, dass dies eintritt, wenn man die beiden ersten von Schiaparelli (Art. 15) aufgestellten Annahmen acceptiert. Der analytische Inhalt dieser Annahmen besteht darin,

1) dass die Multiplikation aller Beobachtungen mit irgend einer Konstanten auch eine Vervielfältigung von F mit der nämlichen Konstanten zur Folge haben muss;

2) dass die additive Hinzufügung einer beliebigen Konstanten zu sämtlichen Beobachtungen die additive Hinzufügung derselben Konstanten zu F herbeiführen muss.

Die dritte Annahme Schiaparelli's erweist sich dabei als überflüssig.

Vermöge der Gleichung (3) des vorigen Artikels kann jeder Mittelwert auf die Form

$$F(l_1, l_2, \ldots l_n) = \frac{[l]}{n} + A_2 + A_3 + \cdots$$

gebracht werden; dabei ist A_n eine ganze homogene Funktion der Grössen $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n$, also von der allgemeinen Gestalt

$$A_n = \alpha[\lambda^n] + \beta[\lambda_i^{n-1}\lambda_{i'}] + \cdots + \xi[\lambda_i^r \lambda_{i'}^s \lambda_{i''}^t \cdots] + \cdots$$
$$(r + s + t + \cdots = n)$$

und die Koeffizienten dieses Ausdruckes sind Funktionen von $a = \frac{[l]}{n}$. Setzt man daher $\xi = \varphi(a)$ und denkt sich alle Beobachtungen mit c multipliziert, so geht a in ca, $\lambda_i = a - l_i$

*) l. c., pag. 39 flg.

in $c\lambda_i$ über, das allgemeine Glied von A_n verwandelt sich also in

$$c^n \varphi(ca)\left[\lambda_i^r \lambda_{i'}^s \lambda_{i''}^t \ldots\right];$$

andrerseits aber geht vermöge der Annahme 1) F in cF über, folglich muss

$$c^n \varphi(ca) = c\varphi(a)$$

oder

$$c^{n-1} \varphi(ca) = \varphi(a);$$

bezeichnet ξ_1 den zu $a = 1$ gehörigen Wert von $\varphi(a)$, so wird

$$\varphi(c) = \frac{\xi_1}{c^{n-1}}$$

und somit

$$\varphi(a) = \frac{\xi_1}{a^{n-1}}.$$

Es nimmt demnach in Folge der Annahme 1) A_n die Form

$$\frac{1}{a^{n-1}}\left\{\alpha_1[\lambda_n] + \beta_1\left[\lambda_i^{n-1}\lambda_{i'}\right] + \cdots + \xi_1\left[\lambda_i^r \lambda_{i'}^s \lambda_{i''}^t\right] + \cdots\right\}$$

oder wenn man den eingeklammerten, nur von den Grössen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ abhängigen Ausdruck mit A_n' bezeichnet, die Form $\frac{A_n'}{a^{n-1}}$ an, und es wird

$$F(l_1, l_2, \ldots l_n) = a + \frac{A_2'}{a} + \frac{A_3'}{a^2} + \cdots$$

Fügt man nun zu sämtlichen Beobachtungen eine Konstante k hinzu, so verändert sich a gleichfalls in $a + k$ während die Grössen $A_2', A_3', \ldots$ keine Änderung erfahren, weil das System der λ dasselbe bleibt, da

$$\lambda_i = a - l_i = a + k - (l_i + k).$$

Zufolge der Annahme 2) verwandelt sich dabei F in $F + k$, es müssen also die beiden Gleichungen

$$F = a + \frac{A_2'}{a} + \frac{A_3'}{a^2} + \cdots$$

$$F + k = a + k + \frac{A_2'}{a+k} + \frac{A_3'}{(a+k)^2} + \cdots$$

neben einander bestehen; dies aber ist nur möglich, wenn $A_2' = A_3' = \cdots = 0$ ist. Dann aber folgt aus der ersten Gleichung

$$F(l_1, l_2, \ldots l_n) = \frac{[l]}{n}$$

als der einzige unter den Mittelwerten, welcher den beiden aufgestellten Bedingungen genügt.

Diese Bedingungen sind, genauer betrachtet, der Ausdruck von Eigenschaften des wahren Wertes der beobachteten Grösse. Dieser wird thatsächlich $c$mal grösser, wenn man die Maasseinheit $c$mal kleiner macht, und verändert sich um k, wenn man den Nullpunkt der Teilung um den genannten Betrag verschiebt. Dass nun, wenn man diese Eigenschaften dem wahrscheinlichsten Werte vorschreibt, dieser mit dem arithmetischen Mittel zusammenfällt, erklärt Ferrero wie folgt. Der wahre Wert einer Grösse ist von den Beobachtungsergebnissen unabhängig, er ist in Bezug auf dieselben eine Konstante; unter den Mittelwerten $F(l_1, l_2, \ldots l_n)$ kommt, analytisch gesprochen, das lineare oder arithmetische Mittel diesem Verhalten am nächsten, indem seine Ableitungen in Bezug auf die einzelnen l von der zweiten Ordnung an verschwinden. Es kann daher nicht befremden, dass eine Annahme, welche dem wahrscheinlichsten Werte solche Eigenschaften zuschreibt, die das Verschwinden der Ableitungen von höherer als der ersten Ordnung in sich schliessen, auf das arithmetische Mittel hinführt.

22. Die Regel des arithmetischen Mittels, als praktisches Rechnungsverfahren, wurde, bevor Gauss sie zur Grundlage einer wichtigen Theorie erhoben, benützt, ohne dass man nach einer wissenschaftlichen Begründung geforscht hätte; sie galt als unanfechtbare Eingebung des Verstandes.

Es ist begreiflich, dass dies anders werden musste, als jene Regel zum Ausgangspunkte einer theoretischen Entwickelung gemacht und dem arithmetischen Mittel eine genau umschriebene Eigenschaft beigelegt ward. Während auf der einen Seite sich Zweifel gegen diese Aufstellung erhoben, sind von der andern Versuche unternommen worden, sie durch Zurückführung auf eine einfachere Annahme zu rechtfertigen. Im Vorangehenden sind die hervorragendsten dieser Versuche dargestellt worden. Was sie angestrebt haben, nämlich den Satz, dass das arithmetische Mittel irgend einer

Anzahl gleich zuverlässiger Beobachtungen einer Grösse ihren wahrscheinlichsten Wert darstelle, auf eine einfachere Annahme von axiomatischem Charakter zurückzuführen, ist nicht gelungen. Für zwei Beobachtungen lässt der Satz einen strengen Beweis zu (s. Anmerk. zu 14); ebenso lässt sich seine Giltigkeit für eine unendliche Anzahl nur mit zufälligen Fehlern behafteter Beobachtungen nicht wohl anzweifeln (s. 12 und 13); aber für die dazwischenliegenden Fälle ist eine befriedigende Begründung bisher nicht gefunden worden und wird — das liegt in der Natur der Sache — nie zu geben sein, so dass also nichts übrig bleibt, als den Satz in der allgemeinen Fassung als Grundsatz hinzunehmen oder auf ihn bei Begründung der Fehlertheorie ganz zu verzichten*).

Nichtsdestoweniger haben die erwähnten Versuche, auch abgesehen von der scharfsinnigen Metaphysik und Analyse, welche sie auszeichnet, Anspruch auf Beachtung, weil sie einen genauen Einblick in den scheinbar einfachen Fall direkter Beobachtungen vermittelt und insbesondere die Stellung des arithmetischen Mittels zu andern Mittelwerten (s. 17—21) geklärt haben.

Neuerdings hat Estienne in einer bemerkenswerten Schrift**) die Regel des arithmetischen Mittels einer Kritik unterzogen und an ihrer Stelle eine Regel vorgeschlagen, welche in allen Fällen gelten soll, wo die Beobachtungen nur von zufälligen Fehlern beeinflusst sind, und folgendermaassen lautet: Man ordne die Beobachtungsresultate nach ihrer Grösse; ist ihre Anzahl ungerad, so gibt das mittelste den wahrscheinlichsten Wert; ist ihre Anzahl gerad, so kann eines der beiden mittleren Resultate und jeder Zwischenwert mit gleichem Rechte als wahrscheinlichster Wert angesehen werden***).

---

*) Man vgl. hierzu die Ausführungen von De Tilly, Note sur la principe de la moyenne arithmétique, Nouv. Corresp. Mathém. I, pag. 137 flg. und seine Ballistique, pag. 160 flg.

**) Étude sur les erreurs d'observation. Paris 1890. (S. Compt. rend., CX, pag. 512.)

***) Indessen kommt Estienne an einer späteren Stelle seiner Schrift auf jene Formen des Fehlergesetzes zu sprechen, welche mit dieser Regel vereinbar sind. (Vgl. Art. 45.)

Die Grundlage für den Beweis dieses Satzes bildet eine Definition der zufälligen Fehler, welche als deren ausschliesslich feststehende Eigenschaft die anerkennt, gleich wahrscheinlich zu sein in dem einen wie im andern Sinne.

Wenn hiernach $l_1, l_2, \ldots l_\varkappa, l_{\varkappa+1}, \ldots l_n$ die nach ihrer Grösse (etwa wachsend) geordneten Beobachtungsresultate sind und x den wahren Wert der beobachteten Grösse bezeichnet, welcher a priori aller Werte eines Intervalls a, das jedenfalls die Beobachtungsergebnisse einschliesst, gleich fähig ist, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass er in ein zwischen $l_\varkappa$ und $l_{\varkappa+1}$ liegendes Intervall x bis $x+dx$ fallen werde, dargestellt durch das Produkt aus der Wahrscheinlichkeit, dass $\varkappa$ Beobachtungen negative und $n-\varkappa$ Beobachtungen positive Fehler anhaften, mit der apriorischen Wahrscheinlichkeit $\frac{dx}{a}$ des Wertes x, d. i.

$$\binom{n}{\varkappa}\left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{dx}{a},$$

daher bei constant bleibendem dx proportional dem Binomialkoeffizienten $\binom{n}{\varkappa}$, also thatsächlich am grössten, wenn bei ungeradem n der Wert x an eine beliebige Stelle zwischen $l_{\frac{n-1}{2}}$ und $l_{\frac{n+3}{2}}$ fällt (strenge genommen mit Ausschluss der Grenzen), und bei geradem n, wenn er zwischen $l_{\frac{n}{2}}$ und $l_{\frac{n}{2}+1}$ zu liegen kommt, da im letzteren Falle die Anzahlen der positiven und negativen Fehler einander genau gleich werden und im andern Falle der Gleichheit möglichst nahe sind. Die oben angegebene Regel ist insofern nicht vollständig oder dieser Theorie nicht genau entsprechend, als sie für den Fall eines ungeraden n aus dem Intervall $l_{\frac{n-1}{2}}$ bis $l_{\frac{n+3}{2}}$ einen bestimmten Wert, nämlich $l_{\frac{n+1}{2}}$ heraushebt, während doch alle Werte jenes Intervalls (wieder mit Ausschluss der Grenzen) das gleiche Recht haben gewählt zu werden.

Der Einwand, der gegen diese Deduktion erhoben werden muss, besteht darin, dass sie auf eine unvollständige Defini-

tion der zufälligen Fehler sich stützt und die unbestrittene Thatsache, dass die Wahrscheinlichkeit eines solchen Fehlers auch von seiner Grösse abhängig ist, bei Seite lässt. So viel Richtiges die Gründe, welche Estienne gegen die Heranziehung des Fehlergesetzes zur Aufstellung einer allgemein giltigen Regel für die Bestimmung des wahrscheinlichsten Wertes anführt, im Einzelnen auch enthalten, den obigen Einwand vermögen sie nicht zu widerlegen. Aus unvollständigen Prämissen kann ein allgemein giltiges Resultat nicht hervorgehen.

Ein Punkt aus Estienne's Kritik des arithmetischen Mittels, den er für den gewichtigsten hält, möge herausgehoben werden. Hat man aus n für gleich gut zu achtenden Beobachtungen $l_1, l_2 \ldots l_n$ das arithmetische Mittel

$$M = \frac{l_1 + l_2 + \cdots + l_n}{n}$$

gebildet, und tritt eine weitere Beobachtung l_{n+1} hinzu, welche nicht mehr Zweifel einflösst als die vorhergehenden, so ist auf die $n+1$ Beobachtungen $l_1, l_2, \ldots l_{n+1}$ die Regel wieder anwendbar und gibt als neues Mittel

$$M' = \frac{nM + l_{n+1}}{n+1} = M + \frac{l_{n+1} - M}{n+1}.$$

Je mehr l_{n+1} von M abweicht, desto grösser sein Einfluss bei Bildung des neuen Mittels, und dies sei gegen die natürliche Vernunft: denn je mehr die neue Beobachtung l_{n+1} von M abweicht, desto mehr habe man Grund zu vermuten, sie sei minder gut, und desto weniger sollte sie auf das Endresultat Einfluss nehmen. Hier stehen zwei Vermutungen einander gegenüber: die vor der Rechnung aus inneren (in der Beobachtung liegenden) Gründen aufgestellte, die neue Beobachtung sei eben so gut wie die früheren, und die nach der Rechnung aus äusseren Gründen geschöpfte, sie sei schlechter als jene. Ein stichhaltiges Argument für die Verwerfung der Regel des arithmetischen Mittels kann also in dem obigen Raisonnement nicht erblickt werden. (Vgl. Art. 91.)

§ 4. Das Fehlergesetz auf Grund der Hypothese des arithmetischen Mittels.

23. Durch gleich genaue Beobachtungen, n an der Zahl, sind für eine zu bestimmende Grösse die Werte $l_1, l_2 \dots l_n$ gefunden worden.

Bei bekanntem Gesetz der Fehler dieser Beobachtungen wäre der wahrscheinlichste Wert der Grösse auf Grund der Bedingung zu bestimmen, dass

$$\Omega = \varphi(x - l_1)\,\varphi(x - l_2)\dots\varphi(x - l_n)$$

in Bezug auf x ein Minimum werden soll, hätte also, wenn man ihn mit a bezeichnet, der Gleichung

$$\text{(1)} \qquad \frac{\varphi'(a - l_1)}{\varphi(a - l_1)} + \frac{\varphi'(a - l_2)}{\varphi(a - l_2)} + \cdots + \frac{\varphi'(a - l_n)}{\varphi(a - l_n)} = 0$$

zu genügen, welche aus der logarithmischen Differentiation von Ω ein Min. hervorgeht.

Stellt man dagegen die Hypothese auf, der wahrscheinlichste Wert der Grösse sei das arithmetische Mittel der Beobachtungsergebnisse*), also

$$\text{(2)} \qquad a = \frac{l_1 + l_2 + \cdots + l_n}{n},$$

dann führt die Forderung, dass die Gleichung (1) durch den Wert (2) befriedigt werden soll, zur Bestimmung des Fehlergesetzes.

Setzt man allgemein

$$\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = \psi(z)$$

und schreibt die Gleichung (2) in der Form

$$\text{(3)} \qquad (a - l_1) + (a - l_2) + \cdots + (a - l_n) = 0,$$

so lässt sich der Inhalt der Gleichungen (1) und (3) dahin aussprechen, dass die Summe der Werte der Function $\psi(z)$ verschwindet, wenn die Summe der zugehörigen Werte der Variabeln selbst Null ist, dass also

$$\text{(4)} \qquad \begin{aligned} \psi(z_1) + \psi(z_2) + \cdots + \psi(z_n) &= 0, \quad \text{wenn} \\ z_1 + z_2 + \cdots + z_n &= 0. \end{aligned}$$

*) Theoria motus corp. coel., art. 177.

Dies reicht, sofern die Anzahl der Grössen $z_1, z_2, \ldots$ **mindestens drei** ist, zur Feststellung der Form von $\psi(z)$ vollkommen aus.

Denn differentiiert man die beiden Gleichungen und subtrahiert die neuen Gleichungen

$$\psi'(z_1)dz_1 + \psi'(z_2)dz_2 + \cdots + \psi'(z_n)dz_n = 0$$
$$dz_1 + dz_2 + \cdots + dz_n = 0$$

von einander, nachdem man die zweite mit einer unbestimmten Konstanten multipliziert hat, so ist in der so erhaltenen Gleichung

$$(\psi'(z_1) - k)dz_1 + (\psi'(z_2) - k)dz_2 + \cdots + (\psi'(z_n) - k)dz_n = 0$$

die ursprüngliche Abhängigkeit der n Differentiale dz_1, $dz_2, \ldots dz_n$ aufgehoben; daraus schliesst man, dass allgemein

$$\psi'(z) = k,$$

daher

$$\psi(z) = \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = kz,$$

weil die Integrationskonstante vermöge der Gleichungen (4) verschwindet; weiter

$$l \cdot \varphi(z) = \frac{k}{2} z^2 + l \cdot C.$$

Vor dem Übergange zu $\varphi(z)$ selbst kann man bemerken, dass, weil diese Funktion für ein unendliches z verschwindet, die Konstante $\frac{k}{2}$ notwendig negativ sein muss; schreibt man sie demgemäss in der Form $-h^2$, so wird

$$\varphi(z) = Ce^{-h^2 z^2}.$$

Die Konstante C kann mittelst der Bemerkung, dass $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(z)dz = 1$ sein muss, weil es gewiss ist, dass der Fehler einer Beobachtung zwischen den Grenzen dieses Integrales liegt, durch h ausgedrückt werden; man findet, da

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2 z^2} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{h}$$

ist,

$$C = \frac{h}{\sqrt{\pi}}$$

und somit schliesslich

(5) $$\varphi(\varepsilon) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2}.$$

Wie aus dem Gange der Betrachtung hervorgeht, drückt diese Funktion streng genommen nicht das Gesetz der wahren Beobachtungsfehler, d. i. der Abweichungen der einzelnen Beobachtungen von dem wahren Werte der beobachteten Grösse aus, sondern das Gesetz der Verteilung ihrer Abweichungen vom arithmetischen Mittel. Indessen ist sie von Gauss*) sowohl wie von späteren Schriftstellern als das Gesetz der eigentlichen Beobachtungsfehler angesehen worden.

Die Bildung von Ω mit der gefundenen Form von φ und die Aufsuchung desjenigen Wertes von x, welcher Ω zu einem Maximum macht, führt naturgemäss auf das arithmetische Mittel, welches der Ableitung zu Grunde gelegt worden ist. In der That wird

$$\Omega = \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-h^2[(x-l)^2]}$$

in Bezug auf die Grösse x ein Maximum, wenn

(6) $$[(x - l)^2] \text{ ein Minimum,}$$

d. h. wenn die Summe der Quadrate der den Beobachtungen zugeschriebenen Fehler möglichst klein wird, und dies führt zu der Bestimmung $x = \frac{[l]}{n}$.

Der Parameter h hängt notwendig mit der Genauigkeit der Beobachtungen zusammen (s. Art. 46 u. 48). Sind diese ungleich genau, so werden sich die ihre Fehler beherrschenden Gesetze in dem Werte des Parameters unterscheiden; es kommt dann

$$\Omega = \frac{h_1 h_2 \ldots h_n}{\sqrt{\pi^n}} e^{-[h^2(x-l)^2]}$$

*) Theoria motus corp. coel., art. 178 u. a.; Bestimmung der Genauigkeit der Beobachtungen, Zeitschr. f. Astron. u. verwandte Wissensch., I, pag. 185.

und wird in Bezug auf die Grösse x ein Maximum, wenn

(7) $$[h^2(x-l)^2] \text{ ein Minimum}$$

wird, also für

(8) $$x = \frac{h_1{}^2 l_1 + h_2{}^2 l_2 \cdots + h_n{}^2 l_n}{h_1{}^2 + h_2{}^2 + \cdots + h_n{}^2} = \frac{[hhl]}{[hh]}.$$

Sind die Zahlen $p_1, p_2, \ldots p_n$ so bestimmt worden, dass

$$p_1 : p_2 : \cdots : p_n = h_1{}^2 : h_2{}^2 : \cdots : h_n{}^2$$

ist (s. Art. 49), so kann an Stelle von (8)

$$x = \frac{[pl]}{[p]}$$

geschrieben werden, und dies fällt überein mit dem aus der Bedingung

(9) $$[p(x-l)^2] \text{ ein Minimum}$$

gezogenen Resultate.

24. Dass es sich hier um den Ausdruck des wahren Gesetzes der Wahrscheinlichkeit der Fehler nicht handeln kann, folgt aus verschiedenen äussern und innern Gründen.

Zunächst gibt die Funktion für Fehler jeder Grösse einen endlichen Grad der relativen Häufigkeit des Vorkommens, während doch feststeht, dass Fehler, welche einen gewissen mässigen Betrag überschreiten, gar nicht vorkommen können. Dieser Umstand fällt aber in Anbetracht des überaus raschen Fallens der Funktion bei wachsendem Argument nicht ins Gewicht. In dieser ihrer hervorstechendsten Eigenschaft liegt auch der Grund, warum es ohne Nachteil für die Resultate angeht, die Grenzen der Fehler ins Unendliche zu erstrecken.

Ein zweiter, innerer, Grund ist darin zu erblicken, dass sich die Ableitung der Funktion auf einen Satz stützt, für dessen Richtigkeit sich ein Beweis im strengen Sinne des Wortes nicht erbringen lässt, der auch gewiss nicht in allen Fällen Geltung hat. Dagegen sollte man glauben, dass so oft er zutrifft, auch die gefundene Funktion genau giltig ist; denn im weiteren Verlaufe der Ableitung ist keine Hypothese mehr aufgestellt und keine Approximation vorgenommen worden.

Nun gibt es einen Fall, wo der Satz vom arithmetischen Mittel streng nachweisbar ist, während die obige Funktion nur den Charakter einer Näherungs- oder Grenzformel trägt, und in diesem Widerspruch, der nur in dem Unterschied zwischen wahren Fehlern und den Abweichungen vom arithmetischen Mittel begründet sein kann, liegt ein entscheidender Anhalt für die Anfechtbarkeit der Theorie*).

Dieser Fall ist der folgende: Angenommen, die zu messende Grösse sei das (konstant bleibende) Verhältnis der Anzahl weisser Kugeln zur Gesamtzahl aller Kugeln in einer Urne von unbekannter Zusammensetzung; man zieht nach und nach, die gezogene wieder zurücklegend, μ Kugeln und r_1 davon mögen weiss sein; ein zweiter, dritter, ... n^{ter} Versuch von demselben Umfange ergebe die Zahlen $r_2, r_3 \ldots r_n$.

Dann kann jeder der Brüche

$$\frac{r_1}{\mu}, \frac{r_2}{\mu}, \ldots \frac{r_n}{\mu}$$

als eine Messung der Unbekannten angesehen werden, und diese Beobachtungen sind, wenn nach jeder Ziehung für eine gehörige Vermischung des Inhalts der Urne gesorgt worden ist, offenkundig gleich genau und umso genauer, je grösser die Zahl μ ist. Die apriorische Wahrscheinlichkeit des beobachteten Ereignisses, wenn mit x das unbekannte Verhältnis bezeichnet wird, ist

$$x^{r_1+r_2+\cdots+r_n}(1-x)^{n\mu-r_1-r_2-\cdots-r_n};$$

der Wert von x, welcher sie zum Maximum macht, also der wahrscheinlichste Wert der beobachteten Grösse ist

$$\alpha = \frac{r_1+r_2+\cdots+r_n}{n\mu},$$

das arithmetische Mittel der durch die n Messungen gewonnenen Werte.

Suchen wir nun die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler der einzelnen Messung, d. i. $x - \frac{r}{\mu}$, zwischen den Grenzen z und $z + dz$ liege. Setzt man der Kürze wegen $\frac{r}{\mu} = p$,

---

*) Bertrand, Calc. des Probab., art. 140 und 142, und Compt. rend., CVI, pag. 563 sq.

$\mu - r = s$, $\frac{s}{\mu} = q$, so ist der strenge Ausdruck dieser Wahrscheinlichkeit nach dem Satze von **Bayes**

$$\omega = \frac{(p + z)^r (q - z)^s dz}{\int_{-p}^{q} (p + z)^r (q - z)^s dz}$$

und kann leicht auf die Form

$$\omega = \frac{\left(1 + \frac{z}{p}\right)^r \left(1 - \frac{z}{q}\right)^s dz}{\int_{-p}^{q} \left(1 + \frac{z}{p}\right)^r \left(1 - \frac{z}{q}\right)^s dz}$$

gebracht werden.

Nun ist

$$\left(1 + \frac{z}{p}\right)^r \left(1 - \frac{z}{q}\right)^s = 1 + \left(\frac{r}{p} - \frac{s}{q}\right) z$$
$$+ \left(\frac{r(r-1)}{p^2} - \frac{2rs}{pq} + \frac{s(s-1)}{q^2}\right) \frac{z^2}{2} + \cdots;$$

vermöge der Bedeutung der Grössen p, q ist $\frac{r}{p} - \frac{s}{q} = 0$, während der Koeffizient des folgenden Gliedes sich auf $-\frac{\mu}{pq}$ reduziert; bleibt man bei diesem Gliede stehen, so wird die rechte Seite der obigen Gleichung

$$1 - \frac{\mu}{2pq} z^2$$

oder mit demselben Grade der Annäherung gleich

$$e^{-\frac{\mu z^2}{2pq}};$$

das Integral, welches den Nenner von ω bildet, geht hiermit und durch die Substitution

$$z = t \sqrt{\frac{2pq}{\mu}}$$

über in

$$\sqrt{\frac{2pq}{\mu}} \int_{-\sqrt{\frac{\mu p}{2q}}}^{\sqrt{\frac{\mu p}{2q}}} e^{-t^2} dt.$$

und wenn μ einigermaassen gross und p nicht sehr klein ist, so können seine Grenzen bis $-\infty$ und $+\infty$ ausgedehnt werden, sein Wert wird dann

$$\sqrt{\frac{2\pi pq}{\mu}}.$$

Führt man die Approximationswerte in den Ausdruck für ω und an Stelle von p, q die ursprünglichen Grössen ein, so wird

$$\omega = \sqrt{\frac{\mu^3}{2\pi r(\mu - r)}}\, e^{-\frac{\mu^3 z^2}{2r(\mu - r)}} dz.$$

Dies stimmt mit dem gefundenen Fehlergesetze in der Form vollkommen überein, kann aber aus den oben angegebenen Gründen nicht als Bestätigung, muss vielmehr als Zeichen für die Unvollkommenheit der Theorie angesehen werden.

25. Wir nehmen die Gleichung (3), Art. 6,

$$y = H\varphi(x - l_1)\varphi(x - l_2)\ldots\varphi(x - l_n),$$

welche das Gesetz der Wahrscheinlichkeit der Werte der beobachteten Grösse x darstellt, wieder auf und stellen sie für das obige Fehlergesetz her. Zunächst wird, wenn man für $H\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n$ kurz H' schreibt,

$$y = H' e^{-h^2\{(x-l_1)^2+(x-l_2)^2+\cdots+(x-l_n)^2\}};$$

setzt man ferner $x = a + u$, unter a das arithmetische Mittel, somit unter u den ihm anhaftenden Fehler verstanden, weiter zur Abkürzung

$$\begin{aligned} a - l_1 &= \lambda_1 \\ a - l_2 &= \lambda_2 \\ \cdot\ \cdot\ &\cdot\ \cdot\ \cdot \\ a - l_n &= \lambda_n, \end{aligned}$$

verbindet den konstanten, d. i. von u unabhängigen Teil $e^{-h^2(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\cdots+\lambda_n^2)}$ der Exponentialgrösse mit H' zu H'' und beachtet, dass $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 0$ ist, so ergibt sich

$$y = H'' e^{-nh^2u^2}.$$

Die Kurve, welche das Gesetz der Wahrscheinlichkeit der Werte von $x = a + u$ darstellt, ist also symmetrisch in

Bezug auf die zur Abszisse $x = a$ gehörige Ordinate; diese Ordinate halbiert zugleich die Fläche der Kurve und geht durch den Schwerpunkt dieser Fläche, mit andern Worten: unter Zugrundelegung des Fehlergesetzes $\varphi(z) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 z^2}$ ist derjenige Wert der Unbekannten, welchem die Eigenschaft des wahrscheinlichsten Wertes zukommt, zugleich mit dem kleinsten durchschnittlichen und dem kleinsten mittleren Fehler behaftet (vgl. Art. 8 und 9).

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler des arithmetischen Mittels zwischen den Grenzen u und $u + du$, die Unbekannte also zwischen den Grenzen $a + u$ und $a + u + du$ eingeschlossen sei, ist $y du$; zur Bestimmung der Konstanten H'' führt der Umstand, dass $\int_{-\infty}^{\infty} y du = 1$ ist, woraus $H'' = \frac{h\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}$; so dass die erwähnte Wahrscheinlichkeit ausgedrückt ist durch

$$\frac{h\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 n u^2} du.$$

Der Fehler des arithmetischen Mittels befolgt also der Form nach dasselbe Gesetz wie der Fehler der einzelnen Beobachtung.

26. Das soeben für einen speziellen Fall nachgewiesene Zusammenfallen des wahrscheinlichsten Wertes mit den beiden Werten, welche sich des kleinsten durchschnittlichen und des kleinsten mittleren Fehlers zu erfreuen haben, findet, wie eine von Laplace*) gegebene Analyse zeigt, unter allgemeineren Bedingungen statt, nämlich wenn die Anzahl der Beobachtungen sehr gross ist und das Gesetz ihrer Fehler der einzigen Bedingung $\varphi(-z) = \varphi(z)$ genügt.

Denkt man sich nämlich $\varphi(z)$ auf die Form einer Exponentialgrösse gebracht, so muss dieselbe, vermöge der zuletzt ausgesprochenen Bedingung, die Gestalt $e^{-\psi(z^2)}$ annehmen; alsdann wird

$$y = He^{-\psi(\overline{x - l_1}^2) - \psi(\overline{x - l_2}^2) - \cdots - \psi(\overline{x - l_n}^2)}.$$

*) Théorie analyt. des Probab., II, art. 23.

Der wahrscheinlichste Wert von x — er heisse wie oben a — muss der Gleichung $\frac{dy}{dx} = 0$, also der Gleichung

$$(1) \qquad (a - l_1)\psi'(\overline{a - l_1}^2) + (a - l_2)\psi'(\overline{a - l_2}^2) + \cdots + (a - l_n)\psi'(\overline{a - l_n}^2) = 0$$

genügen, wenn zur Abkürzung $\frac{d\psi(v)}{dv} = \psi'(v)$ geschrieben wird. Setzt man nun $x = a + u$ und entwickelt den Exponenten von e nach Potenzen von u, wobei zu bemerken ist, dass allgemein

$$\psi(\overline{a - l + u}^2) = \psi(\overline{a - l}^2) + 2(a - l)\psi'(\overline{a - l}^2)u + \{\psi'(\overline{a - l}^2) + 2(a - l)^2\psi''(\overline{a - l}^2)\}u^2 + \cdots$$

und bedient sich ferner der Abkürzungen

$$a - l_1 = \lambda_1$$
$$a - l_2 = \lambda_2$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$a - l_n = \lambda_n$$

$$M = \psi(\lambda_1^2) + \psi(\lambda_2^2) + \cdots + \psi(\lambda_n^2)$$
$$N = \lambda_1\psi'(\lambda_1^2) + \lambda_2\psi'(\lambda_2^2) + \cdots + \lambda_n\psi'(\lambda_n^2)$$
$$P = \psi'(\lambda_1^2) + \psi'(\lambda_2^2) + \cdots + \psi'(\lambda_n^2) + 2\{\lambda_1^2\psi''(\lambda_1^2) + \lambda_2^2\psi''(\lambda_2^2) + \cdots + \lambda_n^2\psi''(\lambda_n^2)\},$$
$$. \quad .$$

so wird

$$y = He^{-M - 2Nu - Pu^2 - Qu^3 - \cdots};$$

der wahrscheinlichste Wert a befriedigt aber die Gleichung (1), d. i.

$$N = 0,$$

für diesen wird also

$$y = He^{-M - Pu^2 - Qu^3 - \cdots}.$$

M, P, Q sind Grössen von der Ordnung n. Ist nun u von der Ordnung $\frac{1}{\sqrt{n}}$ oder kleiner, so ist Qu^3 ebenfalls von dieser oder höherer Kleinheitsordnung, und wird n als eine sehr grosse Zahl vorausgesetzt, so kann e^{-Qu^3} mit der Einheit vertauscht werden. Wird aber u grösser, etwa von der

Ordnung $\frac{1}{n^{\frac{\alpha}{2}}}$, wo $\alpha < 1$, so wird Pu^2 von der Ordnung $n^{1-\alpha}$ und daher e^{-Pu^2}, mithin auch y so klein, dass man für alle Werte von u

$$y = He^{-M-Pu^2}$$

setzen kann. Die Kurve, welche das Gesetz der Wahrscheinlichkeit der Werte von $x = a + u$ repräsentiert, ist also symmetrisch in Bezug auf den Wert $u = 0$ oder $x = a$; mithin kommen diesem Werte die drei oben erwähnten Eigenschaften zu gleicher Zeit zu.

Stellen wir uns wieder die Frage, wie das Fehlergesetz $e^{-\psi(z^2)}$ beschaffen sein muss, damit es für a beständig das arithmetische Mittel gebe, so werden wir naturgemäss wieder zu der früheren Form dieses Gesetzes geführt. Denn die gestellte Bedingung erfordert den gleichzeitigen Bestand der beiden Gleichungen

$$\lambda_1\psi'(\lambda_1^2) + \lambda_2\psi'(\lambda_2^2) + \cdots + \lambda_n\psi'(\lambda_n^2) = 0$$
$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 0$$

und dieser ist nur dann möglich, wenn

$$\psi'(z^2) = k,$$

wobei k eine Konstante bezeichnet. Dann folgt aber

$$\psi(z^2) = kz^2 - l \cdot C,$$

somit thatsächlich

$$\varphi(z) = Ce^{-kz^2}.$$

Hierdurch ist erwiesen, dass nicht allein das arithmetische Mittel derjenige Wert der Unbekannten ist, welcher auf das Gesetz (5), Art. 23, hinführt, sondern dass auch umgekehrt dieses Gesetz das einzige ist, welches beständig das arithmetische Mittel als den zu wählenden Wert bezeichnet.

27. Die Hypothese des arithmetischen Mittels und die Annahme, dass die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers eine Funktion seiner Grösse allein sei, hängen auf das engste mit einander zusammen. Sie bilden die untrennbaren Grundlagen der oben entwickelten Theorie. Aber weder die eine noch die andere dieser beiden Annahmen hat allgemeine Geltung.

Wollte man annehmen, das arithmetische Mittel mehrerer auf Messungen beruhender Werte einer Grösse stelle immer den wahrscheinlichsten Wert dieser Grösse dar, so führte dies zu Widersprüchen. Hat man z. B. eine Grösse x wiederholt gemessen und die Resultate $l_1, l_2, \ldots l_n$ erhalten, so hat man damit, wenn auch indirekt, jegliche Funktion von x beobachtet und für die Funktion $f(x)$ beispielsweise die Werte $f(l_1), f(l_2), \ldots f(l_n)$ erhalten. Einerseits wäre nun auf Grund dieser Messungen der wahrscheinlichste Wert von x

$$\frac{l_1 + l_2 + \cdots + l_n}{n},$$

andererseits der wahrscheinlichste Wert von $f(x)$

$$\frac{f(l_1) + f(l_2) + \cdots + f(l_n)}{n}$$

und man wäre berechtigt, daraus auf die Gleichung

$$f\left(\frac{l_1 + l_2 + \cdots + l_n}{n}\right) = \frac{f(l_1) + f(l_2) + \cdots + f(l_n)}{n}$$

zu schliessen, die aber augenscheinlich allgemeine Geltung nicht hat.

Allerdings ist von Gauss die Hypothese blos für direkte oder unmittelbare Beobachtungen und nicht für Grössen aufgestellt worden, welche aus jenen durch irgend welche Operationen abgeleitet sind; aber es kann Fälle geben, wo der Begriff des Unmittelbaren nicht vollkommen bestimmt ist. Man denke sich ein Instrument, welches zwei Angaben zugleich macht, die mit einander in einem funktionalen Zusammenhange stehen. Hier könnte es unter Umständen schwer werden zu entscheiden, welche der beiden Angaben das Merkmal des Unmittelbaren trägt und daher die Hypothese des arithmetischen Mittels zulässt.

Auch die Annahme, dass die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers in der experimentellen Bestimmung einer Grösse eine Funktion seines Betrages allein sei, trifft nicht immer zu. Ist für die Grösse x durch Messung der Wert l gefunden worden, so ist damit zugleich für die Grösse $f(x)$ der Wert $f(l)$ gewonnen. Der Fehler in der ersten Bestimmung ist

$$x - l = z,$$

seine Wahrscheinlichkeit sei proportional $\varphi(z)$. Der Fehler in der zweiten Bestimmung ist

$$f(l+z) - f(l) = Z = f'(l)z + \frac{1}{2}f''(l)z^2 + \cdots,$$

und seine Wahrscheinlichkeit, da er mit z zugleich begangen ward, ist wieder proportional $\varphi(z)$, also nicht mehr eine Funktion von Z allein. Beschränkt man sich auf Glieder der ersten Ordnung in z, so wird $z = \frac{Z}{f'(l)}$ und somit $\varphi(z) = \varphi\left(\frac{Z}{f'(l)}\right)$, also ausser von Z auch von l abhängig.

28. Bertrand*) hat sich mit der Untersuchung der Frage beschäftigt, welche allgemeine Form die Funktion, die den wahrscheinlichsten Wert der beobachteten Grösse durch die einzelnen Beobachtungsergebnisse darstellt, haben müsse, um mit der Annahme vereinbar zu sein, dass die Wahrscheinlichkeit eines Beobachtungsfehlers von diesem allein abhänge, eine Annahme, die man mit dem Begriff des Fehlergesetzes a priori verbindet.

Es sei also

$$a = F(l_1, l_2, \ldots l_n)$$

der wahrscheinlichste Wert der beobachteten Grösse x, abgeleitet auf Grund der n unabhängigen Resultate $l_1, l_2, \ldots l_n$, und die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers z in der einzelnen Beobachtung proportional der Funktion $\varphi(z)$. Setzt man wie früher $\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = \psi(z)$, so muss die Gleichung

$$\psi(x - l_1) + \psi(x - l_2) + \cdots + \psi(x - l_n) = 0$$

durch die Substitution $x = a$ befriedigt werden, welches auch die speziellen Werte von $l_1, l_2, \ldots l_n$ sein mögen. Die n Grössen

$$a - l_1,\ a - l_2,\ \ldots a - l_n,$$

welche sämtlich Funktionen der n Variabeln $l_1, l_2, \ldots l_n$ vorstellen, sind also nicht unabhängig von einander; daraus folgt, dass ihre Funktionaldeterminante verschwinden müsse. Man hat also zur Bestimmung von a die Gleichung

*) Calcul des Probab., art. 144, und Compt. rend., CVI, pag. 153 sq.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial a}{\partial l_1} - 1 & \frac{\partial a}{\partial l_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial a}{\partial l_n} \\ \frac{\partial a}{\partial l_1} & \frac{\partial a}{\partial l_2} - 1 & \cdots & \frac{\partial a}{\partial l_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial a}{\partial l_1} & \frac{\partial a}{\partial l_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial a}{\partial l_n} - 1 \end{vmatrix} = 0,$$

welche sich leicht auf die lineare Differentialgleichung

$$\frac{\partial a}{\partial l_1} + \frac{\partial a}{\partial l_2} + \cdots + \frac{\partial a}{\partial l_n} = 1$$

reduciert*). Die Lagrange'schen Hilfsgleichungen

$$dl_1 = dl_2 = \cdots = dl_n = da$$

geben die n von einander unabhängigen Integrale

$$a - l_1 = C_1, \quad a - l_2 = C_2, \ldots a - l_n = C_n$$

oder die ihnen äquivalenten

$$a - \frac{l_1 + l_2 + \cdots + l_n}{n} = C_1', \; l_2 - l_1 = C_2', \; l_3 - l_1 = C_3', \ldots l_n - l_1 = C_n';$$

demnach ist das allgemeine Integral der obigen Differentialgleichung

$$a = \frac{l_1 + l_2 + \cdots + l_n}{n} + \Phi(l_2 - l_1, \quad l_3 - l_1, \ldots l_n - l_1),$$

wobei Φ eine willkürliche Funktion der eingeschlossenen Argumente bezeichnet; jeder Wahl von Φ entspricht eine besondere Form des Fehlergesetzes φ**).

---

*) Wenn man nämlich die erste Zeile von allen folgenden subtrahiert, dann alle Kolonnen von der zweiten angefangen zur ersten addiert, so geht die Determinante über in

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial a}{\partial l_1} + \frac{\partial a}{\partial l_2} + \cdots + \frac{\partial a}{\partial l_n} - 1, & \frac{\partial a}{\partial l_2} & \frac{\partial a}{\partial l_3} & \cdots & \frac{\partial a}{\partial l_n} \\ 0 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 \end{vmatrix}.$$

**) Wie Tisserand bemerkt hat, ist Φ und somit auch a eine symmetrische Funktion von $l_1, l_2, \ldots l_n$, wenn

$$\Phi = \Psi\left(l_1 - \frac{[l]}{n}, \; l_2 - \frac{[l]}{n}, \; \ldots l_n - \frac{[l]}{n}\right),$$

Dies ist also die allgemeine Form der gesuchten Funktion. Sie zeichnet sich durch die Eigenschaft aus, dass ein allen Beobachtungen erteilter Zuwachs α einen ebenso grossen Zuwachs der Funktion herbeiführt. Diese Eigenschaft bildet das zweite Postulat des Schiaparelli'schen Beweises (s. 15).

Damit sind die von Reuschle*) als möglich bezeichneten Formen des wahrscheinlichsten Wertes

$$a = \sqrt[m]{\frac{S_m}{n}}, \quad a = \sqrt[m]{\frac{C_m}{c_m}}, \quad a = \sqrt[m]{\frac{C_m'}{c_m'}},$$

wo S_m die Summe der m^{ten} Potenzen der einzelnen l, C_m, C_m' die Summe ihrer Kombinationen ohne, resp. mit Wiederholung zur m^{ten} Klasse, c_m, c_m' die bezüglichen Anzahlen dieser Kombinationen bezeichnen, als hinfällig erwiesen, sobald m von der Einheit verschieden ist. Denn sie erfreuen sich der obigen Eigenschaft nicht und sind daher mit einem Fehlergesetz, das nur die Fehlergrösse in Rechnung bringt, nicht vereinbar.

Bemerkenswert ist der Umstand, dass wohl zu jedem Fehlergesetz, welches die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers als Funktion seiner Grösse allein darstellt, eine Kombination der Beobachtungen gehört, welche den wahrscheinlichsten Wert der beobachteten Grösse vertritt, dass aber nicht umgekehrt zu jeder Kombinationsform der Beobachtungen ein Fehlergesetz der beschriebenen Art angebbar ist. So giebt es kein Fehlergesetz, welches das geometrische oder das harmonische Mittel der Beobachtungen als wahrscheinlichsten Wert gibt, weil diese Kombinationen in der oben gefundenen allgemeinen Form für a nicht enthalten sind.

§ 5. **Das Fehlergesetz auf Grund der Hypothese der Elementarfehler.**

29. Der Ableitung des Fehlergesetzes aus der Hypothese des arithmetischen Mittels lässt sich der Vorzug grosser

---

wobei Ψ irgend eine symmetrische Funktion der eingeschlossnen Argumente $l_1 - \frac{[l]}{n}, \cdots$ bedeutet. Compt. rend., CV, pag. 231.

*) Crelle J., 26, pag. 353.

Einfachheit und Klarheit nicht absprechen; dagegen haftet ihr der Mangel an, dass sie auf die Natur der Fehler, die Art ihrer Entstehung nicht eingeht. Die Hypothese, von welcher die Ableitung ausgeht, betrifft vielmehr einen dem zu erforschenden Gesetz fern liegenden Gegenstand.

Daraus erklärt sich das Bestreben der Geometer, dem Fehlergesetz eine festere Grundlage dadurch zu geben, dass man bei seiner Ableitung auf die innere Natur der Fehler, auf ihre Entstehung aus den verschiedenen Fehlerursachen zurückgeht. Diesem Vorhaben scheinen sich auf den ersten Blick unüberwindliche Schwierigkeiten in den Weg zu stellen. Wohl erkennt man bei näherer Betrachtung des Vorganges bei einer Beobachtung, dass ihr Fehler nicht etwas Einfaches ist, sondern aus dem Zusammenwirken einer mehr oder weniger beträchtlichen Zahl von Fehlerquellen entsteht, also das Resultat der Kombination mehrerer Elementarfehler ist. Aber wenn schon die Erkennung aller Fehlerquellen, welche bei einer Gattung von Beobachtungen wirksam sind, Schwierigkeiten begegnet, so häufen sich diese noch mehr, sobald man daran geht, die Gesetze der einzelnen Elementarfehler zu erforschen; dies sollte aber, so scheint es, der Erforschung des Gesetzes des Gesamtfehlers vorangehen.

Man sieht sich also auch hier auf die Aufstellung von Hypothesen angewiesen. Je weniger einschränkende Voraussetzungen über die Gesetze der Elementarfehler eine solche Hypothese nötig macht, desto allgemeiner wird das aus ihr abgeleitete Fehlergesetz sein, d. h. desto mehr Fälle wird es in der Praxis geben, wo die Fehler sich diesem Gesetze unterordnen.

Was nun die Elementarfehler betrifft, so werden dieselben in mannigfachster Weise zur Wirkung kommen. Zunächst wird es eine Klasse von Fehlerquellen geben, aus welchen Elementarfehler entspringen, die eines jeden Wertes zwischen gewissen Grenzen fähig sind; das Gesetz ihrer Wirkung lässt sich durch eine Funktion, geometrisch durch eine Kurve darstellen in demselben Sinne, wie es für den Gesamtfehler geschehen ist. Aber diese Kurve kann die mannigfachsten Formen annehmen; nicht immer wird sie so

verlaufen, dass sie positiven und negativen Fehlern gleichen Betrages den gleichen Grad der Leichtigkeit beimisst, und nicht immer wird sie kleinen Beträgen des Elementarfehlers eine grössere Wahrscheinlichkeit zuschreiben, als den nahe der Grenze liegenden.

Neben dieser Gattung von Fehlerursachen wird es andere geben, welche bei jeder Beobachtung einen Fehler von derselben Grösse, also einen konstanten Fehler erzeugen. Ihre Wirkungsweise ist durch eine Funktion oder eine Kurve nicht darstellbar; in der geometrischen Versinnlichung würde ihr ein bestimmter Punkt in der Axe, auf welcher die Fehler abgetragen werden, entsprechen, der bei jeder Beobachtung mit Gewissheit getroffen wird.

Noch andere Fehlerquellen geben zur Entstehung von Elementarfehlern Veranlassung, deren jeder mehrere bestimmte Werte annehmen kann, einen jeden mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit. Auch bei diesen kann die Wirkungsweise durch eine Funktion oder eine Kurve nicht versinnlicht werden; an die Stelle der letzteren treten mehrere bestimmte Punkte in der Axe der Fehler, von denen jeder einzelne bei einer Beobachtung mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit getroffen wird.

Während ferner manche Fehlerquellen bei jeder Beobachtung zur Wirkung kommen, wird es andere geben, welche nur gelegentlich auftreten und dann in der einen oder andern der angedeuteten Weisen sich kennzeichnen. Bei solchen Fehlerquellen tritt die Wahrscheinlichkeit, dass sie in Aktion kommen, als neues Element hinzu.

Ein gewichtiger Umstand liegt in der Zahl und der relativen Bedeutung der bei einer Beobachtung konkurrierenden Fehlerquellen. Die Anzahl wird im allgemeinen um so grösser sein, je komplizierter die Hilfsmittel der Beobachtung und je verwickelter der dabei befolgte Vorgang ist. Mit dem Fortschreiten der Beobachtungskunst ist die relative Bedeutung der einzelnen Fehlerquellen dem Gleichgewichte immer näher gerückt worden. Während zu einer Zeit, wo die Instrumente noch unvollkommen waren, einige wenige

Fehlerquellen überwogen derart, dass die andern kaum zum Ausdruck kommen konnten in dem Gesetze des Gesamtfehlers — wie dies auch heute bei primitiv angestellten Beobachtungen vorkommen mag —, erfreuen sich die modernen Hilfsmittel der Messkunst, namentlich der astronomischen und geodätischen, eines hohen Grades von Ebenmässigkeit, durch welchen die grossen Unterschiede in der relativen Bedeutung der Elementarfehler aufgehoben sind. Wenn nun hier eine grosse Anzahl von Fehlerquellen nachweisbar ist, so folgt daraus von selbst, dass jede einzelne nur geringe Bedeutung haben kann im Vergleiche zum Gesamtfehler, insbesondere, dass die Elementarfehler einzeln zwischen sehr engen Grenzen sich bewegen müssen.

Eine weitere wichtige Frage geht dahin, ob die verschiedenen Fehlerquellen unabhängig von einander wirken; denn dadurch ist die Anwendbarkeit der Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung wesentlich bedingt. Bei einer Klasse von Fehlerquellen vermag man einen Zusammenhang nicht zu erkennen und sie bilden ohne Zweifel die Mehrheit aller. Dagegen gibt es andere, bei denen eine gewisse Abhängigkeit nicht zu leugnen ist; so muss bei allen Elementarfehlern, welche von den Schwankungen der Temperatur herrühren, ein gegenseitiger Zusammenhang vermutet werden. Aber die Unmöglichkeit, diesen Zusammenhang in Rechnung zu bringen, lässt keine andere Wahl übrig, als die Fehlerquellen dieser zweiten, jedenfalls minder zahlreichen Klasse auch als unabhängig anzusehen.

Wir haben diese allgemeine Betrachtung vorangestellt, um uns bei den verschiedenen Hypothesen, welche im folgenden über die Entstehungsweise der Beobachtungsfehler werden aufgestellt werden, ein Urteil darüber bilden zu können, wie weit sie mit den thatsächlichen Verhältnissen übereinstimmen. Endgiltig entscheiden kann nur die Erfahrung.

30. Der Fehler x einer Beobachtung entspringe aus einer einzigen Ursache derart, dass er in bekannter Weise von einer Grösse ξ abhängt, welche ihrerseits aller Werte zwischen gegebenen Grenzen $-\alpha$ und $+\alpha$ fähig

ist, eines jeden mit einem bestimmten Grade der Leichtigkeit*).

Es sei also

(1) $$x = f(\xi)$$

und $g(\xi)$ das Wahrscheinlichkeitsgesetz der Werte von ξ. Um das Gesetz $\varphi(x)$ des Fehlers x zu finden, bemerke man, dass die Wahrscheinlichkeit eines zwischen den Grenzen x und $x + dx$ liegenden Wertes von x identisch ist mit der Wahrscheinlichkeit eines zwischen den zugehörigen Grenzen ξ und $\xi + d\xi$ liegenden Wertes von ξ, so dass

$$\varphi(x)dx = g(\xi)d\xi;$$

da nun $dx = f'(\xi)d\xi$, so ergibt sich das verlangte Fehlergesetz aus

(2) $$\varphi(x) = \frac{g(\xi)}{f'(\xi)}$$

durch Elimination von ξ mit Hilfe von (1).

Einige Beispiele werden es erläutern.

a) Die Wahrscheinlichkeit sei für alle Werte von ξ dieselbe und x proportional ξ; also

$$g(\xi) = \frac{1}{2\alpha}, \quad x = a\xi;$$

dann ist

$$\varphi(x) = \frac{1}{2a\alpha},$$

es haben also auch alle Werte von x denselben Grad der Leichtigkeit. Wenn dieses Gesetz platzgriffe, gäbe es keinen wahrscheinlichsten Wert der Unbekannten, weil die hierzu erforderliche Gleichung (4), 7, oder (1), 23 illusorisch würde.

b) Alle Werte von ξ zwischen den Grenzen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ seien gleich wahrscheinlich und x proportional dem Sinus von ξ**), also

---

*) Bessel, Untersuch. über die Wahrsch. der Beobachtungsfehler, Astron. Nachr., Bd. 15, Nr. 358—359.

**) Ein dieser Annahme entsprechender Fall tritt ein, wenn mit einem Kreise, der nur einfache Ablesung gestattet und dessen Alhidade eine bekannte Exzentrizität aufweist, an beliebigen nicht angegebenen Stellen der Teilung ein Winkel gemessen wird.

$$g(\xi) = \frac{1}{\pi}, \quad x = a \sin \xi;$$

man findet dann

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Gleich grosse positive und negative Fehler sind gleich wahrscheinlich; ihre relative Häufigkeit wächst aber mit dem absoluten Betrage und erreicht an der Grenze $x = \pm a$ einen unendlichen Wert. Bei diesem Fehlergesetz gäbe es ebenfalls keinen wahrscheinlichsten Wert der beobachteten Grösse im eigentlichen Sinne; im Gegenteil wäre hier derjenige Wert derselben vorzuziehen, welchem die kleinste Wahrscheinlichkeit zukommt.

c) Allen Werten von ξ zwischen $-\alpha$ und $+\alpha$ komme gleiche Wahrscheinlichkeit zu und x sei proportional dem Quadrat von ξ*), also

$$g(\xi) = \frac{1}{2\alpha}, \quad x = a\xi^2;$$

hieraus ergibt sich

$$\varphi(x) = \frac{1}{4\alpha\sqrt{ax}}.$$

Dieses Fehlergesetz zeichnet sich vor dem vorangehenden dadurch aus, dass es Fehler nur eines Vorzeichens zulässt; mit dem Wachsen des Fehlers nimmt seine relative Häufigkeit ab und wird für unendlich kleine Fehler unendlich gross. Auch hier könnte von einem wahrscheinlichsten Werte einer wiederholt beobachteten Grösse nur insofern gesprochen werden, als dem grössten, resp. kleinsten unter den Beobachtungsergebnissen eine unendlich grosse relative Wahrscheinlichkeit zukommt, so dass er allen andern Werten vorzuziehen wäre**).

---

*) Ein dieser Annahme entsprechender Fall ergibt sich bei dem Messen der Länge einer Stange mit einer sphärisch gekrümmten Endfläche auf einem mikrometrischen Apparat, welcher den Fehler hat, dass der Mittelpunkt der sphärischen Endfläche nicht genau in die Gerade zwischen der Mikrometerspitze und jenem Punkte, von welchem an die Länge gezählt wird, gebracht werden, sondern innerhalb der Grenzen $-\alpha$ und $+\alpha$ willkürlich davon entfernt sein kann, wie eine einfache geometrische Betrachtung zeigt.

**) Vgl. des Verf. Note in Grunert Arch., Th. IX (2) pag. 97 flg.

31. Indem wir zu Fehlern übergehen, welche aus mehreren von einander unabhängigen Elementarfehlern zusammengesetzt sind, möge mit dem einfachsten Fall der Zusammensetzung zweier Elementarfehler x_1, x_2 begonnen werden, deren Gesetze $\varphi_1(x_1)$, $\varphi_2(x_2)$ sind und welche zwischen den unteren Grenzen a_1, a_2 und den oberen b_1, b_2 beziehungsweise sich bewegen. Der zusammengesetzte Fehler heisse z, sein Gesetz $\varphi(z)$.

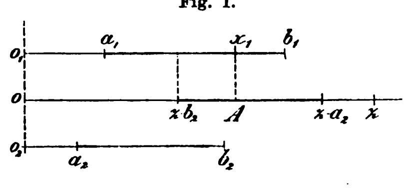
Die Wahrscheinlichkeit, dass x_1 zwischen den Grenzen x_1 und $x_1 + dx_1$ enthalten sei, ist $\varphi_1(x_1)dx_1$; soll bei dem Wert x_1 des ersten Fehlers ein zwischen z und $z + dz$ liegender zusammengesetzter Fehler entstehen, so muss x_2 zwischen $z - x_1$ und $z - x_1 + dz$ liegen, und die Wahrscheinlichkeit hiefür ist $\varphi_2(z - x_1)dz$. Demzufolge ist

$$\varphi(z) = \int \varphi_1(x_1)\varphi_2(z - x_1)dx_1,$$

wobei die Integration über jene Werte von x_1 zu erstrecken ist, welche mit dem Werte z verträglich sind. In der Feststellung dieser Grenzen liegt die erste Schwierigkeit der Aufgabe. Zuerst möge ein Verfahren erläutert werden, welches Schols*) angegeben hat und das auch bei beliebig vielen Elementarfehlern benützt werden kann.

Es sei $\varphi_1(x_1)$ durch die materielle Linie $o_1 a_1 b_1$, Fig. 1, dargestellt**), so dass wirklich mögliche Werte von x_1 durch Punkte der Strecke $a_1 b_1$ dargestellt sind; ebenso versinnliche die materielle Linie $o_2 a_2 b_2$ das Gesetz $\varphi_2(x_2)$ des zweiten Fehlers, dessen möglichen Werten Punkte der Strecke $a_2 b_2$ entsprechen. Die mittlere Linie diene zunächst zur Darstellung von $\varphi_2(z - x_1)$, schliesslich aber auch zur Darstellung des zusammengesetzten Fehlers. Einem festgesetzten Werte z desselben entsprechen, da

Fig. 1.



*) Annales de l'École Polytechn. de Delft, II, pag. 142 flg. und ibid., III, pag. 142 flg.

**) Vgl. Art. 4.

$z - x_1 = x_2$ und a_2, b_2 die Grenzen von x_2 sind, $z - b_2$ und $z - a_2$ als Grenzen der mit ihm verträglichen Werte von x_1, welchen die Punkte der Strecke $z - b_2$, $z - a_2$ auf der mittleren Linie zugeordnet sind. Diese Strecke ist gleichsam das verkehrte Spiegelbild der Strecke $a_2 b_2$ der dritten Linie. Da aber nur solche Werte von x_1 wirklich möglich sind, welche den Punkten der Strecke $a_1 b_1$ entsprechen, so können bei dem festgesetzten Werte von z nur solche Werte von x_1 in Betracht kommen, welche korrespondierenden Punkten der beiden Strecken $a_1 b_1$ und $z - b_2$, $z - a_2$, wie x_1 und A, angehören, und damit sind die Grenzen der obigen Integration nach x_1 festgestellt; bei dem in der Figur angenommenen Werte z sind sie: $x_1 = z - b_2$ und $x_1 = b_1$. Ändert man z, so ändert sich nur die Lage der Strecke $z - b_2$, $z - a_2$ auf der mittleren Linie, nicht aber ihre Länge.

Vier Lagen dieser Strecke sind von besonderer Bedeutung, diejenigen nämlich, wo einer ihrer Endpunkte mit einem Endpunkte von $a_1 b_1$ korrespondiert.

Fällt $z - a_2$ unter a_1, so ist $z = a_1 + a_2$ und es korrespondiert kein weiteres Punktepaar beider Strecken.

Fällt $z - b_2$ unter a_1, so ist $z = a_1 + b_2$ und es haben alle Punkte der oberen Strecke von $x_1 = a_1$ bis $x_1 = a_1 + b_2 - a_2$ korrespondierende Punkte auf der mittleren.

Fällt $z - a_2$ unter b_1, so ist $z = b_1 + a_2$ und es haben alle Punkte der oberen Strecke von $x_1 = b_1 + a_2 - b_2$ bis $x_1 = b_1$ korrespondierende auf der mittleren.

Fällt endlich $z - b_2$ unter b_1, so ist $z = b_1 + b_2$ und die beiden Strecken haben kein weiteres Paar korrespondierender Punkte.

Die gefundenen vier Werte von z, nämlich

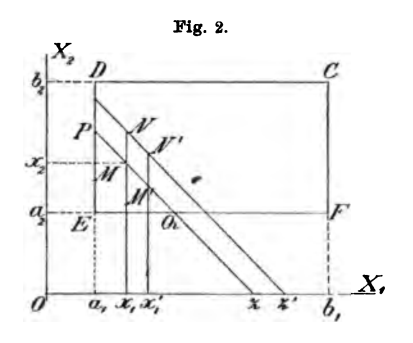
$$a_1 + a_2, \quad a_1 + b_2, \quad b_1 + a_2, \quad b_1 + b_2,$$

welche dadurch entstehen, dass man die unteren und oberen Grenzen der beiden Elementarfehler auf alle möglichen Arten kombiniert, bezeichnen Unstetigkeitsstellen der Funktion $\varphi(z)$ insofern, als dieselbe bei Überschreitung dieser Stellen ihre Form ändert. Es ist also das Gesetz des Fehlers z im allgemeinen durch drei verschiedene Funktionen dargestellt,

entsprechend den drei Intervallen, welche durch die vier besonderen Werte von z begrenzt werden.

Ein anderer Weg, um zu diesen Resultaten zu gelangen, ist der folgende. Man betrachte x_1, x_2 als die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes der Ebene; dann entspricht jeder Wertkombination der beiden Elementarfehler ein Punkt M der Ebene und allen möglichen Kombinationen die Gesamtheit aller Punkte in dem Rechteck $CDEF$, Fig. 2, wobei $Oa_1 = a_1$, $Ob_1 = b_1$, $Oa_2 = a_2$, $Ob_2 = b_2$ ist. Der zusammengesetzte Fehler $z = x_1 + x_2$ wird durch die Strecke Oz dargestellt, welche man erhält, indem man durch den Punkt M eine zu den Axen gleich geneigte Gerade Mz führt; jedem Punkte dieser Geraden, der innerhalb oder am Rande des Rechteckes $CDEF$ liegt, entspricht eine Kombination der Elementarfehler, welche zu demselben z führt. Macht man $zz' = dz$, $x_1x_1' = dx_1$, zieht Nz' parallel Mz und $N'x_1'$ parallel Nx_1, so drückt das Produkt $\varphi_1(x_1)\varphi_2(z - x_1)dx_1dz$ die Wahrscheinlichkeit aus, dass ein zwischen z und $z + dz$ liegender Gesamtfehler aus einer der Kombinationen von Elementarfehlern entspringe, welche durch Punkte des Parallelogramms $MM'N'N$ dargestellt sind. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein zwischen den bezeichneten Grenzen eingeschlossener Gesamtfehler überhaupt entstehen werde, wird durch das Integral

Fig. 2.



$$dz \int \varphi_1(x_1)\varphi_2(z - x_1)dx_1$$

ausgedrückt sein, genommen zwischen denjenigen Grenzen, welche die Transversale PQ des Fehlerrechtecks angibt, der Figur entsprechend also zwischen $x_1 = a_1$ und $x_1 = z - a_2$.

Von besonderer Wichtigkeit sind die Transversalen, welche durch die Eckpunkte des Rechtecks gehen; sie bezeichnen jene Werte von z, durch welche das Gebiet dieser

Grösse in Teile zerlegt wird, für deren jeden eine andere Form von $\varphi(z)$ gilt.

Aus der einen wie aus der andern Darstellung ist die Bedingung leicht zu entnehmen, unter welcher es nur zwei Gebiete von z gibt.

Es sei $a_1 = -b_1$, $a_2 = -b_2$, demnach O der Mittelpunkt des Rechtecks $CDEF$, ferner $b_1 > b_2$*); dann sind die Grenzwerte von z, nach ihrer Grösse geordnet,

$$G_1 = -b_1 - b_2, \quad G_2 = -b_1 + b_2, \quad G_3 = b_1 - b_2, \quad G_4 = b_1 + b_2$$

und die zugehörigen Formen von $\varphi(z)$, wie man durch Zuhilfenahme der Figur leicht findet,

$$\varphi_{\mathrm{I}}(z) = \int_{-b_1}^{z+b_2} \varphi_1(x_1)\varphi_2(z - x_1)dx_1 \qquad G_1 < z < G_2$$

$$\varphi_{\mathrm{II}}(z) = \int_{z-b_2}^{z+b_2} \varphi_1(x_1)\varphi_2(z - x_1)dx_1 \qquad G_2 < z < G_3$$

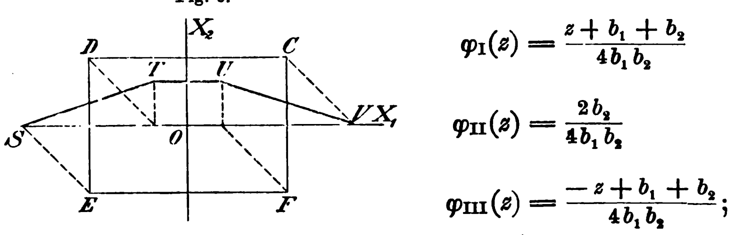
$$\varphi_{\mathrm{III}}(z) = \int_{z-b_2}^{b_1} \varphi_1(x_1)\varphi_2(z - x_1)dx_1 \qquad G_3 < z < G_4.$$

Um dies an speziellen Beispielen zu erläutern, möge zunächst jeder der beiden Elementarfehler konstante Wahrscheinlichkeit aufweisen; es ist dann

$$\varphi_1(x_1) = \frac{1}{2b_1}, \qquad \varphi_2(x_2) = \frac{1}{2b_2},$$

und

Fig. 3.



$$\varphi_{\mathrm{I}}(z) = \frac{z + b_1 + b_2}{4b_1 b_2}$$

$$\varphi_{\mathrm{II}}(z) = \frac{2b_2}{4b_1 b_2}$$

$$\varphi_{\mathrm{III}}(z) = \frac{-z + b_1 + b_2}{4b_1 b_2};$$

das resultierende Fehlergesetz ist durch die gebrochene Linie $STUV$, Fig. 3, dargestellt.

*) Bessel l. c., pag. 379 flg.

Es sei ferner der erste Elementarfehler dem in 30, b) gefundenen, der andere dem im vorangehenden Beispiel angenommenen Gesetz unterworfen, also

$$\varphi_1(x_1) = \frac{1}{\pi\sqrt{b_1^2 - x_1^2}}, \quad \varphi_2(x_2) = \frac{1}{2b_2}.$$

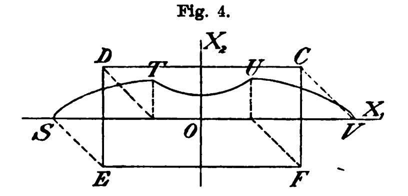
Man findet dann

$$\varphi_{\mathrm{I}}(z) = \frac{1}{2\pi b_2}\left(\frac{\pi}{2} + \arcsin\frac{z+b_2}{b_1}\right)$$

$$\varphi_{\mathrm{II}}(z) = \frac{1}{2\pi b_2}\left(\arcsin\frac{z+b_2}{b_1} - \arcsin\frac{z-b_2}{b_1}\right)$$

$$\varphi_{\mathrm{III}}(z) = \frac{1}{2\pi b_2}\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{z-b_2}{b_1}\right);$$

Fig. 4.



das resultierende Fehlergesetz ist durch eine aus drei Teilen zusammengesetzte, gegen die Ordinatenaxe symmetrische Kurve *STUV*, Fig. 4, dargestellt und zeigt zwei Maxima und ein Minimum.

Diese beiden Beispiele zeigen schon, in welch eigentümlicher Weise die Gesetze der Elementarfehler durch das Zusammenwirken modifiziert werden.

32. Der behandelte Fall erfährt eine wesentliche Vereinfachung, wenn einer der beiden Elementarfehler, etwa x_2, aller Werte zwischen $-\infty$ und $+\infty$ fähig ist. Dann tritt an die Stelle des Rechtecks *CDEF* ein Flächenstreifen in Richtung der X_2-Axe von der Breite $b_1 - a_1$ und für das ganze Wertgebiet des zusammengesetzten Fehlers z kommt dieselbe Darstellung

$$(1) \qquad \varphi(z) = \int_{a_1}^{b_1} \varphi_1(x_1)\varphi_2(z - x_1)dx_1$$

zur Geltung*). Durch Entwicklung von $\varphi_2(z - x_1)$ in eine nach Potenzen von x_1 fortschreitende Reihe wird

$$\varphi(z) = \varphi_2(z) \int_{a_1}^{b_1} \varphi_1(x_1)dx_1 - \varphi_2'(z) \int_{a_1}^{b_1} x_1 \varphi_1(x_1)dx_1$$

$$+ \frac{\varphi''(z)}{1 \cdot 2} \int_{a_1}^{b_1} x_1^2 \varphi_1(x_1)dx - \cdots;$$

darin ist aber

$$\int_{a_1}^{b_1} \varphi_1(x_1)dx_1 = 1,$$

weil jeder mögliche Wert von x_1 zwischen den Grenzen a_1, b_1 notwendig liegen muss, und setzt man

$$\int_{a_1}^{b_1} x_1 \varphi_1(x_1)dx_1 = k_1', \qquad \int_{a_1}^{b_1} x_1^2 \varphi_1(x_1)dx_1 = k_1'', \ldots$$

so kommt**)

$$(2) \qquad \varphi(z) = \varphi_2(z) - k_1'\varphi_2'(z) + \frac{k_1''}{1 \cdot 2} \varphi_2''(z) - \cdots.$$

Diese Darstellung ist dadurch bemerkenswert, dass das Gesetz des einen Elementarfehlers darin nicht mehr als solches, sondern nur mit den von ihm abhängigen Grössen k_1', k_1'', ... erscheint.

33. Um das Gesetz eines aus drei Elementarfehlern x_1, x_2, x_3 zusammengesetzten Fehlers zu finden, hätte man zunächst zwei Fehler zusammenzusetzen und mit ihrer Resultante den dritten zu verbinden. Für z ergeben sich in diesem Falle, sofern zwischen den Grenzen der Elementarfehler keine speziellen Beziehungen bestehen, acht besondere Werte, indem man jeden der vier Werte $a_1 + a_2$, $a_1 + b_2$, $b_1 + a_2$, $b_1 + b_2$ einmal mit der untern Grenze a_3, einmal mit der oberen Grenze b_3 des dritten Fehlers verbindet; diese

*) Crofton, London Philosoph. Transact., vol. 160, pag. 182.

**) Eine andere Ableitung dieser Formel gab Crofton in der Encycl. Britannica, Artikel Probability, pag. 781.

acht Werte teilen das Gebiet von z in sieben Intervalle, welchen ebensoviele verschiedene Formen von $\varphi(z)$ entsprechen. Auch hier kann noch die zweite der beiden geometrischen Darstellungen aus Art. 31 angewendet werden; fasst man nämlich x_1, x_2, x_3 als die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes im Raume auf, so entspricht allen Wertkombinationen der drei Fehler die Gesamtheit der Punkte in einem gewissen Parallelepiped; gegen die Koordinatenaxen gleich geneigte Durchschnitte dieses Parallelepipeds bestimmen die Grenzen des Integrals

$$\varphi(z) = \int\int \varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)\varphi_3(z - x_1 - x_2)dx_1 dx_2,$$

durch welches das Gesetz des zusammengesetzten Fehlers ausgedrückt wird, und insbesondere führen die durch die Ecken gelegten Durchschnitte zu den erwähnten acht Grenzwerten von z.

Bei mehr als drei Elementarfehlern hört die Möglichkeit einer geometrischen Versinnlichung in der letztgedachten Weise auf. Da jeder neu hinzutretende Elementarfehler die Anzahl der Grenzwerte von z verdoppelt, so beträgt diese Anzahl bei n Elementarfehlern 2^n und daher die Anzahl der verschiedenen Formen von z $2^n - 1$.

Bessel hat bis zu vier Elementarfehlern die Betrachtung geführt und ihre weitere Verfolgung mit dem Hinweis auf die Kompliziertheit und den untergeordneten praktischen Wert aufgegeben. In jüngster Zeit haben Kummell*) und Schols**) den Gegenstand von neuem aufgenommen. Ersterer führt, um eine allgemeine Formel für die Wahrscheinlichkeit des zusammengesetzten Fehlers zu gewinnen, den Diskontinuitätsfaktor von Lejeune-Dirichlet ein, ohne die Schwierigkeiten, die aus der Diskontinuität von $\varphi(z)$ hervorgehen, ganz zu lösen. Vom allgemeinsten Standpunkte ist die Frage durch Schols behandelt worden, welcher zu einer allgemeinen Formel für die Wahrscheinlichkeit eines aus einer beliebigen

*) Astron. Nachr., Bd. 103, No. 2460—61.

**) Ann. de l'École Polytechn. de Delft, III, pag. 140 flg.

Anzahl von Elementarfehlern zusammengesetzten Beobachtungsfehlers in einem beliebigen Intervall von z gelangt ist.

Für spätere Zwecke soll die allgemeine Form für das Gesetz eines Fehlers aufgestellt werden, welcher durch das Zusammenwirken von n unabhängigen Fehlerquellen entsteht.

Es seien

$$x_1, \qquad x_2, \qquad \ldots \qquad x_n$$

die Elementarfehler, welche einzeln dem Gesetze

$$\varphi_1(x_1), \qquad \varphi_2(x_2), \qquad \ldots \qquad \varphi_n(x_n)$$

gemäss wirken, und zwar zwischen den bezüglichen Grenzen

$$-a_1 \text{ und } +a_1', \quad -a_2 \text{ und } +a_2', \quad \ldots \quad -a_n \text{ und } +a_n'.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass der ersten Fehlerquelle ein Fehler im Betrage zwischen x_1 und $x_1 + dx_1$ entspringt, ist $\varphi_1(x_1)dx_1$; eine ähnliche Bedeutung hat das Produkt $\varphi_2(x_2)dx_2$ für die zweite, ... $\varphi_n(x_n)dx_n$ für die n^{te} Fehlerquelle. Die Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen dieser Beträge, vermöge der vorausgesetzten Unabhängigkeit der Fehlerursachen, ist

$$\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)\ldots\varphi_n(x_n)dx_1dx_2\ldots dx_n,$$

und die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe dieser Beträge, d. i. der Gesamtfehler zwischen z und $z + dz$ fallen werde wird durch das Integral

$$(1) \qquad \int\int\ldots\int\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)\ldots\varphi_n(x_n)dx_1dx_2\ldots dx_n$$

ausgedrückt sein, das auszudehnen ist über alle Wertverbindungen der Variabeln, die der Bedingung

$$z \leqq x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leqq z + dz$$

Genüge leisten.

Um der Schwierigkeit der Bestimmung der Grenzen für die einzelnen Integrationen enthoben zu sein, empfiehlt es sich, unter dem Integralzeichen einen Discontinuitätsfaktor einzuführen, welcher die Eigenschaft haben muss zu verschwinden, sobald $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ das Intervall von z bis $z + dz$ verlässt, und gleich der Einheit zu sein, wenn

die erwähnte Summe in dieses Intervall fällt. Ein solcher Faktor ist in dem Integral*)

$$\frac{dz}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\cos(x_1 + x_2 + \cdots + x_n - z)\Theta\, d\Theta$$

vorhanden, für welches aus naheliegenden Gründen auch

$$\frac{dz}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\Theta\, e^{(x_1+x_2+\cdots+x_n-z)\Theta\sqrt{-1}}$$

genommen werden kann.

Dadurch ist man von den Grenzen der einzelnen Integrationen in (1) unabhängig geworden, kann sie also bis an die Grenzen des jeweiligen Fehlers erstrecken und für (1) schreiben

---

*) Bekanntlich hat das Integral

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin(p-z)\Theta\, d\Theta}{\Theta}$$

den Wert $+\frac{1}{2}$ oder $-\frac{1}{2}$, jenachdem $p > z$ oder $p < z$, während es für $p = z$ verschwindet. Demnach hat die Differenz

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin(p-z-dz)\Theta\, d\Theta}{\Theta} - \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin(p-z)\Theta\, d\Theta}{\Theta}$$

den Wert Null, wenn $p > z + dz$ oder $p < z$, dagegen den Wert -1, wenn $z < p < z + dz$; an den Grenzen $p = z$ und $p = z + dz$ selbst wird sie gleich $-\frac{1}{2}$. Bringt man diese Differenz unter ein Integralzeichen und bemerkt, dass bis auf Grössen höherer als der ersten Ordnung

$$\sin(p-z-dz)\Theta = \sin(p-z)\Theta - \Theta dz\cos(p-z)\Theta,$$

so ergibt sich als schliessliches Resultat, dass das Integral

$$\frac{dz}{\pi}\int_{0}^{\infty}\cos(p-z)\Theta\, d\Theta \quad \text{oder} \quad \frac{dz}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\cos(p-z)\Theta\, d\Theta$$

den Wert 1 hat, wenn $z < p < z + dz$, während es ausserhalb dieses Gebietes verschwindet. (Glaisher, Mem. of the R. Astron. Soc., XXXIX, pag. 110.)

$$\frac{dz}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-a_1}^{a_1'}\int_{-a_2}^{a_2'}\cdots\int_{-a_n}^{a_n'}\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)\ldots$$

$$\ldots\varphi_n(x_n)e^{(x_1+x_2+\cdots+x_n-z)\Theta\sqrt{-1}}d\Theta dx_1 dx_2\ldots dx_n;$$

da dieser Ausdruck, der eingeführten Bezeichnungsweise gemäss, mit $\varphi(z)dz$ zu vergleichen ist, so hat man für das Gesetz des zusammengesetzten Fehlers die Darstellung

$$\varphi(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-a_1}^{a_1'}\varphi_1(x_1)e^{\Theta x_1\sqrt{-1}}dx_1\int_{-a_2}^{a_2'}\varphi_2(x_2)e^{\Theta x_2\sqrt{-1}}dx_2\ldots\right.$$

$$(2)\qquad \left.\ldots\int_{-a_n}^{a_n'}\varphi_n(x_n)e^{\Theta x_n\sqrt{-1}}dx_n\right\}e^{-z\Theta\sqrt{-1}}d\Theta.$$

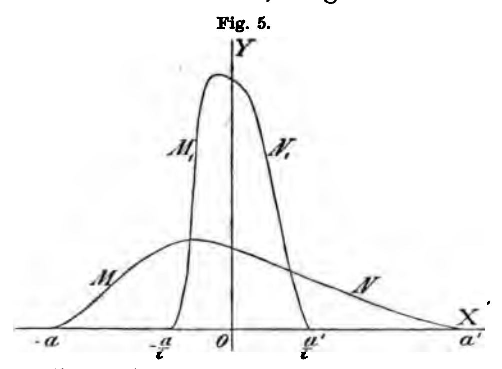
34. Die verschiedenen Hypothesen über die Entstehung der Beobachtungsfehler stimmen in der Annahme einer sehr grossen Anzahl unabhängiger Elementarfehler überein, deren jeder für sich betrachtet nur von sehr geringer Bedeutung ist im Vergleiche zu dem Gesamtfehler. Wornach die Bedeutung eines Fehlers, oder anders gesagt sein Einfluss, zu beurteilen ist, soll die folgende Erwägung zeigen.

Es sei x ein Fehler von endlicher Bedeutung — etwa der Gesamtfehler einer gewissen Gattung von Beobachtungen —, $-a$, $+a'$ seien seine Grenzen und

$$y=\varphi(x)$$

das Gesetz seiner Wirksamkeit, dargestellt durch die Kurve

Fig. 5.



MN, Fig. 5. Die wahrscheinlichen Werte der ersten, zweiten, dritten, ... Potenz von x, nämlich

$$
(1) \qquad
\begin{aligned}
k' &= \int_{-a}^{a'} x\varphi(x)dx \\
k'' &= \int_{-a}^{a'} x^2\varphi(x)dx \\
k''' &= \int_{-a}^{a'} x^3\varphi(x)dx \\
&\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

sind notwendig endliche Werte und geeignet, die Bedeutung von x darnach zu schätzen, während für jedes Fehlergesetz

$$k^{(0)} = \int_{-a}^{a'} \varphi(x)dx = 1$$

ist. Unter den Werten $k^{(r)}$ sind jene mit geradem Zeiger von denjenigen mit ungeradem Zeiger wohl zu unterscheiden. Während bei den ersteren der Zeichenunterschied der Fehler aufgehoben ist und jeder Fehler seinem Betrage und seiner Wahrscheinlichkeit entsprechend zur Bildung der Summe beiträgt, heben sich bei dem wahrscheinlichen Wert einer ungeraden Potenz die positiven und negativen Fehler zum Teil oder vollständig auf; insbesondere ist bei einem Fehlergesetz von der Eigenschaft $\varphi(-x) = \varphi(x)$

$$k^{(r)} = 0$$

für jeden ungeraden Zeiger r.

Hieraus geht hervor, dass zunächst nur die wahrscheinlichen Werte der geraden Potenzen einen Maassstab abgeben für den Einfluss des Fehlers und dass man bei den ungeraden Potenzen, wenn man sie zu diesem Zwecke heranziehen will, den Zeichenunterschied aufheben, sie also blos mit ihrem absoluten Betrage in Rechnung bringen müsse.

Man denke sich nun einen zweiten Fehler x_1, welcher zu x in solcher Beziehung steht, dass dem i^{ten} Teil von x in dem neuen System eine i mal so grosse relative Wahrscheinlichkeit oder Häufigkeit zukommt, als sie dem Werte x im ersten System eigen war; dann ist das Gesetz dieses neuen Fehlers charakterisiert durch die Gleichung

$$y_1 = i\varphi(ix_1),$$

welcher die Kurve $M_1 N_1$ entsprechen möge. Die Grenzen von x_1 sind $-\frac{a}{i}$, $\frac{a'}{i}$ und die wahrscheinlichen Werte seiner aufeinander folgenden Potenzen

$$k_1' = \int_{-\frac{a}{i}}^{\frac{a'}{i}} x_1 i\varphi(ix_1)dx_1 = \frac{1}{i}\int_{-a}^{a'} x\varphi(x)dx = \frac{1}{i}k'$$

$$(2) \quad k_1'' = \int_{-\frac{a}{i}}^{\frac{a'}{i}} x_1^2 i\varphi(ix_1)dx_1 = \frac{1}{i^2}\int_{-a}^{a'} x^2\varphi(x)dx = \frac{1}{i^2}k''$$

$$k_1''' = \int_{-\frac{a}{i}}^{\frac{a'}{i}} x_1^3 i\varphi(ix_1)dx_1 = \frac{1}{i^3}\int_{-a}^{a'} x^3\varphi(x)dx = \frac{1}{i^3}k'''$$

. . . .

so dass allgemein

$$(3) \qquad k_1^{(r)} = \frac{1}{i^r} k^{(r)}.$$

Die wahrscheinlichen Werte der aufeinander folgenden Potenzen von x sind also im Verhältnisse der gleich hohen Potenzen der Zahl i verkleinert, und wir sind berechtigt, dem Fehler x_1 einen i mal geringeren Einfluss beizumessen als dem Fehler x. Crofton*) nennt x und x_1 ähnliche Fehler und insbesondere x_1 ein Diminutiv von x.

35. Erste Hypothese. Der Fehler einer Beobachtung sei das Resultat des Zusammenwirkens einer sehr grossen Anzahl unabhängiger Fehlerursachen, welche einzeln demselben Gesetze folgen, das nur die einzige Bedingung erfüllt, numerisch gleichen Fehlern gleiche Wahrscheinlichkeit beizulegen.

Es ist das Gesetz des Gesamtfehlers festzustellen.

---

1) l. c., pag. 181 und 183.

Dieser Fall ist durch die in Art. 8 entwickelte Analyse von Laplace erledigt. Durch diese Analyse ist gezeigt worden, dass, wenn

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots \quad x_n$$

die Fehler von n unabhängigen Beobachtungen sind, sämtlich dem nämlichen Gesetze folgend, die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Summe

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

zwischen z und $z + dz$ liege, unter den in der Hypothese ausgesprochenen Bedingungen mit einer bis auf Grössen der Ordnung $\frac{1}{n}$ gehenden Näherung durch das Produkt $\varphi(z)dz$ dargestellt ist, wobei

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n k''}} e^{-\frac{z^2}{2nk''}}$$

und k'' den wahrscheinlichen Wert des Quadrates eines solchen Fehlers bedeutet. Die Analyse und ihr Resultat behält Geltung, wenn n unabhängige Fehlerursachen die Elementarfehler

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots \quad x_n$$

und durch ihr Zusammenwirken den Gesamtfehler z erzeugen.

Wenn man die Grenzen der Elementarfehler wie an der citierten Stelle mit $-\alpha\omega$ und $+\alpha\omega$ bezeichnet, so sind $-n\alpha\omega$ und $+n\alpha\omega$ die Grenzen von z und der wahrscheinliche Wert seines Quadrates

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi n k''}} \int\limits_{-n\alpha\omega}^{n\alpha\omega} z^2 e^{-\frac{z^2}{2nk''}} dz;$$

die Grenzen dieses Integrals können aber, da unter n eine sehr grosse Zahl zu denken und $\alpha\omega$ endlich ist, mit Rücksicht auf die Natur der Funktion unter dem Integralzeichen bis $-\infty$ und $+\infty$ ausgedehnt werden und sein Wert ist dann

$$nk''.$$

Vergleicht man also den Gesamtfehler mit einem Elementarfehler auf Grund der wahrscheinlichen Werte ihrer Quadrate, so kommt dem ersteren eine $\sqrt{n}$ mal so grosse

Bedeutung zu als dem letzteren; und es muss, soll nk'' eine endliche Grösse vorstellen, k'' von der Grössenordnung $\frac{1}{n}$ sein.

36. Ein besonderer Fall der vorstehenden ist die Hypothese von Hagen*), welche annimmt, dass der Fehler einer Beobachtung das Ergebnis des Zusammentreffens einer sehr grossen Anzahl von einander unabhängiger gleicher, sehr kleiner Elementarfehler sei, von welchen jeder einzelne mit derselben Wahrscheinlichkeit im positiven wie im negativen Sinne auf das Beobachtungsresultat einwirken kann.

Man könnte das analytische Resultat dieser Hypothese, ohne eine neue Untersuchung anzustellen, aus dem vorigen ableiten, wenn man bemerkt, dass in dem letzteren das Gesetz der Elementarfehler nicht als solches, sondern nur mit der von ihm bedingten Grösse k'' auftritt. Nennt man die Anzahl der bei einer Beobachtung zusammenwirkenden Fehlerursachen $2n$, die Grösse eines Elementarfehlers ε, so ist der wahrscheinliche Wert seines Quadrates

$$k'' = \frac{1}{2}(-\varepsilon)^2 + \frac{1}{2}(+\varepsilon)^2 = \varepsilon^2,$$

mithin das Gesetz des Gesamtfehlers z

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{4\pi n\varepsilon^2}}\, e^{-\frac{z^2}{4n\varepsilon^2}}. \tag{1}$$

Aber die Bedeutung der Hagen'schen Hypothese liegt gerade darin, dass sie eine elementare Behandlung zulässt und die Entstehung eines Beobachtungsfehlers aus einer grossen Anzahl von Elementarfehlern durch einen sehr anschaulichen Vergleich dem Verständnis nahe rückt. Daher erklärt sich auch die häufige Reproduktion der Hagen'schen Ableitung in Schriften didaktischer Richtung.

---

*) Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung; 1. Aufl. 1837, 3. Aufl. 1882. Die exakte mathematische Darstellung rührt von Encke her, Berl. Astron. Jahrb. 1853. — Der Gedanke, die Wahrscheinlichkeiten der verschiedenen Fehler durch die Koeffizienten der Entwicklung eines Binoms darzustellen, findet sich schon bei Young vor: Remarks on the probabilities of error in physical observations etc., London Philosoph. Transact., 1819, pag. 70 flg.

Unter den obigen Annahmen ist nämlich die Entstehung eines Fehlers vergleichbar einem Wurfe mit $2n$ Würfeln*), deren jeder zwei mit $-\varepsilon$ und $+\varepsilon$ beschriebene Seiten hat und jeder dieser Seiten die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ verleiht, nach obenhin zu fallen: die algebraische Summe der zum Vorschein gekommenen Beträge entspricht dem zusammengesetzten Fehler. Um die Wahrscheinlichkeit zu finden, dass dieser eine bestimmte Grösse $2m\varepsilon$**) habe, hat man den Koeffizienten von $t^{2m\varepsilon}$ in der Entwicklung von $(t^{-\varepsilon}+t^{\varepsilon})^{2n}$, welcher die Anzahl der günstigen Fälle darstellt und mit $u_{2m\varepsilon}$ bezeichnet werden soll, durch die Anzahl 2^{2n} der möglichen Fälle zu dividieren und erhält

$$\varphi(2m\varepsilon)2\varepsilon = \frac{u_{2m\varepsilon}}{2^{2n}}.$$

Nun ist

$$u_{2m\varepsilon} = \frac{(2n)!}{(n-m)!(n+m)!}$$

und der grösste unter den Koeffizienten

$$u_0 = \frac{(2n)!}{n!\,n!},$$

folglich

$$\frac{u_{2m\varepsilon}}{u_0} = \frac{n!\,n!}{(n-m)!\,(n+m)!}.$$

Wendet man auf diese Ausdrücke die Stirling'sche Formel

$$x! = \sqrt{2\pi x}\, x^{x+\frac{1}{2}}\, e^{-x+\frac{1}{12x}-\frac{1}{360x^3}+\frac{1}{1260x^5}-\cdots}$$

oder

$$x! = \sqrt{2\pi x}\, x^{x+\frac{1}{2}}\, e^{-x}\left(1+\frac{1}{12x}+\frac{1}{288x^2}-\frac{139}{51840x^3}+\cdots\right)$$

an, so ergibt sich einerseits

$$u_0 = \frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}}\left(1-\frac{1}{8n}+\frac{1}{128n^2}+\frac{5}{1024n^3}-\cdots\right)$$

---

*) Die Voraussetzung einer geraden Anzahl von Fehlerursachen hat, ohne die Allgemeinheit zu beeinträchtigen, den Zweck, auch die Möglichkeit der Entstehung des Fehlers Null offen zu lassen.

**) Die möglichen Werte des Gesamtfehlers bilden eine arithmetische Progression mit der Differenz 2ε und den Endgliedern $-2n\varepsilon$ und $+2n\varepsilon$.

und andererseits

$$\frac{u_{2m\varepsilon}}{u_0} = \left(\frac{n}{n-m}\right)^{n-m+\frac{1}{2}} \left(\frac{n}{n+m}\right)^{n+m+\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{6}\left(\frac{1}{n} - \frac{n}{n^2-m^2}\right) - \frac{1}{180}\left(\frac{1}{n^3} - \frac{n^3+3nm^2}{(n^2-m^2)^3}\right) + \cdots}$$

Es ist aber

$$l \cdot \frac{n}{n-m} = -l \cdot \left(1 - \frac{m}{n}\right) = \quad \frac{m}{n} + \frac{1}{2}\frac{m^2}{n^2} + \frac{1}{3}\frac{m^3}{n^3} + \cdots$$

$$l \cdot \frac{n}{n+m} = -l \cdot \left(1 + \frac{m}{n}\right) = -\frac{m}{n} + \frac{1}{2}\frac{m^2}{n^2} - \frac{1}{3}\frac{m^3}{n^3} + \cdots,$$

folglich

$$\left(\frac{n}{n-m}\right)^{n-m+\frac{1}{2}} \left(\frac{n}{n+m}\right)^{n+m+\frac{1}{2}} = e^{-\frac{m^2}{n} + \frac{1}{2}\frac{m^2}{n^2} - \frac{1}{6}\frac{m^4}{n^3} + \frac{1}{4}\frac{m^4}{n^4} - \cdots};$$

ferner

$$\frac{1}{n} - \frac{n}{n^2-m^2} = -\frac{m^2}{n^3} - \frac{m^4}{n^5} - \cdots, \quad \frac{1}{n^3} - \frac{n^3+3nm^2}{(n^2-m^2)^3} = -\frac{6m^2}{n^5} - \cdots,$$

daher

$$\frac{u_{2m\varepsilon}}{u_0} = e^{-\frac{m^2}{n} + \frac{1}{2}\frac{m^2}{n^2} - \frac{1}{6}\frac{m^4+m^2}{n^3} + \frac{1}{4}\frac{m^4}{n^4} - \cdots}$$

$$= e^{-\frac{m^2}{n}}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{m^2}{n^2} - \frac{1}{6}\frac{m^4+n^2}{n^3} + \frac{3}{8}\frac{m^4}{n^4} - \cdots\right).$$

Mit wachsendem m nimmt dieses Verhältnis sehr rasch ab, indem es sich der Null nähert, und verliert sein praktisches Interesse, sobald es sehr klein geworden ist; denn bei Ereignissen von sehr geringer relativer Wahrscheinlichkeit ist selbst in ausgedehnten Beobachtungsreihen an eine Vergleichung der Theorie mit der Erfahrung nicht zu denken. Man wird sich also für die Zwecke der Praxis auf jene Fälle beschränken dürfen, für welche

$$\frac{m^2}{n} = p^2$$

keine beträchtliche Zahl (höchstens = 3) ist. Mit dieser Abkürzung ist

$$\frac{u_{2m\varepsilon}}{u_0} = e^{-p^2}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{p^2}{n} - \frac{1}{6}\frac{p^4}{n} - \frac{1}{6}\frac{p^2}{n^2} + \frac{3}{8}\frac{p^4}{n^2} - \cdots\right),$$

und wenn man u_0 durch seinen oben angeschriebenen Wert ersetzt,

$$u_{2m\varepsilon} = \frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}} e^{-p^2}\left\{1 - \left(\frac{1}{8} - \frac{p^2}{2} + \frac{p^4}{6}\right)\frac{1}{n} + \cdots\right\};$$

daraus ergibt sich schliesslich

$$\varphi(2m\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{4n\pi\varepsilon^2}} e^{-p^2} \left\{1 - \left(\frac{1}{8} - \frac{p^2}{2} + \frac{p^4}{6}\right)\frac{1}{n} + \cdots\right\}.$$

Aber selbst für eine nur mässig grosse Anzahl von Fehlerursachen kann der letzte Faktor der Einheit gleich geachtet werden, wenn man das, was oben über die Grösse von p bemerkt worden, berücksichtigt. Um so mehr darf man also für eine sehr grosse Anzahl von Fehlerquellen

$$\varphi(2m\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{4n\pi\varepsilon^2}} e^{-\frac{m^2}{n}}$$

setzen. Bezeichnet man nun allgemein die Grösse des zusammengesetzten Fehlers $2m\varepsilon$ mit z, so wird

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{4n\pi\varepsilon^2}} e^{-\frac{z^2}{4n\varepsilon^2}}$$

in Übereinstimmung mit dem oben angegebenen Resultat (1).

Man kann diesem Ausdruck eine andere Form verleihen, wenn man den Maximalfehler $E = 2n\varepsilon$ einführt, wodurch

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon E}} e^{-\frac{z^2}{2\varepsilon E}}$$

wird; darnach ist der wahrscheinliche Wert von z^2 dargestellt durch das Produkt εE, während der wahrscheinliche Wert des Quadrates des Elementarfehlers ε^2 ist.

37. Eine Ableitung des Fehlergesetzes, welche an dieser Stelle anzuführen ist, weil sie der Hagen'schen insofern ähnlich ist, als sie sich ebenfalls auf das Problem der Wahrscheinlichkeit wiederholter Versuche stützt, hat Tait*) gegeben; doch thut seine Untersuchung einen Schritt weiter, indem sie nicht mehr bei allen Fehlerursachen die nämliche Wirkung voraussetzt, und unterscheidet sich auch im Gedankengange wesentlich von jener. Sie geht nämlich nicht von der Thatsache aus, dass der Totalfehler die Summe der aus den einzelnen Ursachen entspringenden Elementarfehler ist, ihr Ziel richtet sich vielmehr nach der Wahrschein-

*) On the Law of Frequency of Error, Edinburgh Transact., XXIV, p. 139 flg.

lichkeit der Koexistenz eines bestimmten Totalfehlers mit den einzelnen Ursachen.

Tait geht von der Annahme aus, dass der durch irgend eine Ursache veranlasste Fehler vergleichbar sei der Abweichung, welche das Ergebnis einer grossen Anzahl von Ziehungen aus einer weisse und schwarze Kugeln in bestimmtem Verhältnis enthaltenden Urne gegenüber dem wahrscheinlichsten Ziehungsergebnis aufweist. Seine Analyse ist eine Vereinfachung derjenigen, welche Laplace*) auf das Problem der wiederholten Versuche anwendet.

Eine Urne enthalte weisse und schwarze Kugeln in dem Verhältnis $p:q$, wobei $p+q=1$ sein soll. Die Wahrscheinlichkeit, in $n=\alpha+\beta$ Ziehungen, bei welchen die gezogene Kugel jedesmal zurückgelegt und mit den andern vermengt wird, α weisse und β schwarze Kugeln zu ziehen, ist

$$\frac{n!}{\alpha!\,\beta!}\,p^{\alpha}q^{\beta}; \tag{1}$$

sie wird um so grösser, je näher das Verhältnis $\alpha:\beta$ dem Verhältnis $p:q$ rückt. Sind n, α, β sehr grosse Zahlen, so kann, bis auf eine Grösse der Ordnung $\frac{1}{n}$, $\alpha:\beta=p:q$ gemacht werden, so dass der Maximalwert von (1) gleichkommt

$$\frac{n!}{(pn)!\,(qn)!}\,p^{pn}q^{qn}. \tag{2}$$

Der Quotient (1) : (2), d. i.

$$\frac{(pn)!\,(qn)!}{\alpha!\,\beta!}\,p^{\alpha-pn}q^{\beta-qn} \tag{3}$$

wird nun als das Gesetz der Abweichung $\alpha-pn$, $\beta-qn$ des beobachteten von dem wahrscheinlichsten Erfolg angesehen.

Indem $\alpha-pn$ als das Maass des Fehlers jenes Erfolges betrachtet wird, hat man, diesen Fehler mit x bezeichnet,

$$\alpha-pn=mx, \qquad \text{also} \qquad \beta-qn=-mx \tag{4}$$

zu setzen, wobei m eine Konstante bezeichnet; seine Wahrscheinlichkeit y ist proportional dem Ausdruck (3), daher

$$y=a\,\frac{(pn)!\,(qn)!}{(pn+mx)!\,(qn-mx)!}\,p^{mx}q^{-mx}.$$

*) Théorie analyt. des Probab., II, art. 16.

Da n als eine sehr grosse Zahl vorausgesetzt wird, so können die Faktoriellen mit Hilfe der **Stirling**'schen Formel

$$k! = \sqrt{2\pi k}\, k^{k+\frac{1}{2}} e^{-k}\left(1 + \frac{1}{12k} + \cdots\right)$$

näherungsweise dargestellt werden, und man erhält, wenn man Grössen von der Ordnung $\frac{1}{n}$ gleich unterdrückt, nach entsprechender Reduktion

$$y = a\,\frac{(pn)^{pn+mx+\frac{1}{2}}\,(qn)^{qn-mx+\frac{1}{2}}}{(pn+mx)^{pn+mx+\frac{1}{2}}\,(qn-mx)^{qn-mx+\frac{1}{2}}}$$

$$= a\left(1+\frac{mx}{pn}\right)^{-\left(pn+mx+\frac{1}{2}\right)}\left(1-\frac{mx}{qn}\right)^{-\left(qn-mx+\frac{1}{2}\right)}.$$

Die logarithmische Entwicklung gibt

$$l\cdot\frac{y}{a} = -\left(pn+mx+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{mx}{pn}-\frac{m^2x^2}{2p^2n^2}+\frac{m^3x^3}{3p^3n^3}-\cdots\right)$$

$$-\left(qn-mx+\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{mx}{qn}-\frac{m^2x^2}{2q^2n^2}-\frac{m^3x^3}{3q^3n^3}-\cdots\right)$$

$$= -\frac{m^2x^2}{2n}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)+\frac{m^3x^3}{6n^2}\left(\frac{1}{p^2}-\frac{1}{q^2}\right)-\frac{mx}{2n}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)$$

$$+\frac{m^2x^2}{4n^2}\left(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2}\right)+\cdots;$$

beschränkt man sich auf Grössen von der Ordnung $\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$, so fallen, wenn mx eine Grösse der Ordnung $n^{\frac{1}{2}}$ ist, neben dem ersten alle übrigen Glieder hinweg; wird mx von höherer Ordnung, dann wird die rechte Seite vermöge des ersten Gliedes eine sehr grosse negative Zahl und $\frac{y}{a}$ so klein, dass man für beide Fälle

$$y = ae^{-\frac{m^2x^2}{2npq}}$$

setzen kann. Schreibt man für die positive Grösse $\frac{m^2}{2npq}$ kurz h^2, so folgt der Fehler dem Gesetze

$$y = ae^{-h^2x^2}. \tag{5}$$

Wenn mehrere Ursachen das Beobachtungsresultat beeinflussen, so ergibt sich für das Gesetz seines Fehlers dieselbe Form und zwar gleichgiltig, ob mit Rücksicht auf alle Fehlerquellen das wahrscheinlichste Resultat dasselbe ist oder nicht. Man denke sich ebenso viele Urnen als Fehlerursachen, jede derselben weisse und schwarze Kugeln in bekanntem Verhältnis enthaltend; aus jeder wird eine grosse Anzahl Kugeln gezogen; es handelt sich um die Wahrscheinlichkeit, dass die Abweichungen der einzelnen Ziehungsergebnisse von den wahrscheinlichsten Resultaten ein und demselben Gesamtfehler entsprechen.

Erzeugen die verschiedenen Ursachen, ν an der Zahl, dasselbe wahrscheinlichste Resultat, so ist seine Wahrscheinlichkeit

$$A = a_1 a_2 \ldots a_\nu$$

und die Wahrscheinlichkeit eines Resultats mit dem Fehler x

$$y = A e^{-H^2 x^2},$$

wobei $H^2 = h_1^2 + h_2^2 + \cdots + h_n^2$.

Entspricht dagegen jeder Ursache ein anderer wahrscheinlichster Wert, so tritt an die Stelle von (5)

$$y = a e^{-h^2 (x-\gamma)^2},$$

so dass $x = \gamma$ den dieser Ursache zugehörigen wahrscheinlichsten Wert bedeutet, und bei dem Zusammenwirken aller Ursachen ergibt sich für einen Gesamtfehler x die Wahrscheinlichkeit

$$y = a_1 a_2 \cdots a_\nu e^{-h_1^2 (x-\gamma_1)^2 - h_2^2 (x-\gamma_2)^2 - \cdots - h_\nu^2 (x-\gamma_\nu)^2};$$

dies kann aber, wenn man bemerkt, dass

$$h_1^2 (x-\gamma_1)^2 + \cdots + h_\nu^2 (x-\gamma_\nu)^2$$
$$= H^2 (x-\Gamma)^2 + h_1^2 \gamma_1^2 + \cdots + h_\nu^2 \gamma_\nu^2 - H^2 \Gamma^2$$

mit den Abkürzungen

$$H^2 = h_1^2 + \cdots + h_\nu^2, \qquad \Gamma = \frac{h_1^2 \gamma_1 + \cdots + h_\nu^2 \gamma_\nu}{h_1^2 + \cdots + h_\nu^2},$$

zunächst auf die Form

$$y = A e^{-H^2 (x-\Gamma)^2}$$

gebracht werden, wobei $A = a_1 \ldots a_\nu e^{-(h_1^2 \gamma_1^2 + \cdots + h_\nu^2 \gamma_\nu^2) + H^2 \Gamma^2}$, und wählt man wieder den wahrscheinlichsten Endwert $x = \Gamma$

als Ausgangspunkt für die Zählung der Fehler, so kommt x an die Stelle von $x - \Gamma$ zu schreiben, so dass man wieder dieselbe Form

(6) $$y = Ae^{-H^2x^2}$$

hat wie vorhin.

Die Deduktion wäre einfach und ungezwungen, wenn ihren Ausgangspunkt nicht eine Annahme bildete, zu deren Gunsten sich kaum etwas Gewichtiges anführen lässt, die Annahme nämlich, dass der aus einer Fehlerquelle hervorgehende Fehler analog sei der Abweichung des Ergebnisses einer grossen Anzahl von Ziehungen weisser und schwarzer Kugeln von dem wahrscheinlichsten Resultate. Die Unstichhaltigkeit dieser Annahme zeigt sich darin, dass vermöge derselben die Fehler aus jedweder Fehlerquelle dem speziellen durch die Exponentialgrösse charakterisierten Gesetz folgen würden, und dies lässt sich mit den Thatsachen nicht vereinbaren; diesen Mangel teilt Tait's Theorie mit der ersten Hypothese, welche bei allen Elementarfehlern dasselbe Gesetz voraussetzt. Tait betrachtet den Umstand, dass das Endresultat unabhängig ist von der Anzahl der Ursachen, als ein gewichtiges Argument für die Korrektheit seiner Beweisführung und übersieht gänzlich, dass dieser Umstand in der Natur der Funktion $e^{-h^2x^2}$ und den Grundlehren der Wahrscheinlichkeitsrechnung begründet ist; es hätte die zum Ausgangspunkt genommene Analogie ebenso gut gleich für den Gesamtfehler aufgestellt werden können statt erst für eine einzelne Fehlerursache.

38. Zweite Hypothese. Der Fehler einer Beobachtung entstehe durch das Zusammenwirken einer grossen Anzahl von unabhängigen Fehlerursachen, welche nach beliebigen Gesetzen und zwischen beliebigen Grenzen wirken, jedoch so, dass gleich grosse positive und negative Fehler gleich häufig vorkommen und die wahrscheinlichen Werte der Quadrate der einzelnen Elementarfehler Grössen von einerlei Ordnung sind.

Diese Hypothese, welche der von Bessel*) entwickelten

*) Untersuch. über die Wahrsch. der Beobachtungsfehler, 1838, Astron. Nachr., Bd. 15, Nr. 358—359.

Theorie zu Grunde liegt, zeichnet sich der vorigen gegenüber durch einen höheren Grad der Allgemeinheit aus insofern, als sie nicht gleiche Wirkungsweise, sondern nur gleiche relative Bedeutung der einzelnen Fehlerursachen voraussetzt. Sie schliesst also Fälle aus, in welchen eine oder einige wenige Fehlerquellen die andern an Bedeutung derart überragen, dass sie allein bestimmend werden für das Gesetz des Gesamtfehlers. Solche Fälle werden aber insbesondere in der feineren Beobachtungskunst zu den Ausnahmen gehören.

Es seien

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots \quad x_n$$

die Elementarfehler, n an der Zahl,

$$\mp a_1, \quad \mp a_2, \quad \ldots \quad \mp a_n$$

ihre Grenzen,

$$\varphi_1(x_1), \quad \varphi_2(x_2), \quad \ldots \quad \varphi_n(x_n)$$

die Funktionen, welche das Gesetz ihrer relativen Häufigkeit darstellen,

$$z = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

der Gesamtfehler. Dann ist (s. Gl. (2), Art. 33) das Gesetz des letzteren

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{\int\limits_{-a_1}^{a_1}\varphi_1(x_1)e^{\Theta x_1\sqrt{-1}}dx_1\int\limits_{-a_2}^{a_2}\varphi_2(x_2)e^{\Theta x_2\sqrt{-1}}dx_2\ldots\right.$$
$$\left.\ldots\int\limits_{-a_n}^{a_n}\varphi_n(x_n)e^{\Theta x_n\sqrt{-1}}dx_n\right\}e^{-z\Theta\sqrt{-1}}d\Theta.$$

Ersetzt man zum Zwecke der Entwicklung die Exponentialgrössen durch die trigonometrischen Ausdrücke, so erkennt man bald, dass sich dieser Ausdruck vermöge der Voraussetzung $\varphi_i(-x_i) = \varphi_i(x_i)$ reduziert auf

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{\int\limits_{-a_1}^{a_1}\varphi_1(x_1)\cos\Theta x_1 dx_1\int\limits_{-a_2}^{a_2}\varphi_2(x_2)\cos\Theta x_2 dx_2\ldots\right.$$
$$\left.\ldots\int\limits_{-a_n}^{a_n}\varphi_n(x_n)\cos\Theta x_n dx_n\right\}\cos z\Theta d\Theta.$$

Das Produkt der n in die Klammer eingeschlossenen Integrale werde Kürze halber mit U bezeichnet. Ein einzelnes dieser Integrale gibt, wenn man den Cosinus in eine Reihe entwickelt und von den üblichen Bezeichnungen

$$\int_{-a_i}^{a_i} x_i^2 \varphi(x_i) dx_i = k_i'', \qquad \int_{-a_i}^{a_i} x_i^4 \varphi_i(x_i) dx_i = k_i^{IV},$$

$$\int_{-a_i}^{a_i} x_i^6 \varphi_i(x_i) dx_i = k_i^{VI}, \ldots$$

Gebrauch macht,

$$\int_{-a_i}^{a_i} \varphi_i(x_i) \cos \Theta x_i dx_i = 1 - \frac{k_i''}{2} \Theta^2 + \frac{k^{IV}}{24} \Theta^4 - \frac{k_i^{VI}}{720} \Theta^6 + \cdots;$$

folglich ist

$$l \cdot \left\{ \int_{-a_i}^{a_i} \varphi_i(x_i) \cos \Theta x_i dx_i \right\} = - \frac{k_i''}{2} \Theta^2 + \frac{k_i^{IV}}{24} \Theta^4 - \frac{k_i^{VI}}{720} \Theta^6 + \cdots$$

$$- \frac{k_i''^2}{8} \Theta^4 + \frac{k_i'' k_i^{IV}}{48} \Theta^6 + \cdots$$

$$- \frac{k_i''^3}{24} \Theta^6 + \cdots$$

$$\cdots\cdots$$

$$= - \frac{k_i''}{2} - \frac{3 k_i''^2 - k_i^{IV}}{24} \Theta^2 - \frac{30 k_i''^3 - 15 k_i'' k_i^{IV} + k_i^{VI}}{720} \Theta^6 + \cdots$$

und daraus ergibt sich

$$l \cdot U = - \frac{[k'']}{2} \Theta^2 - \frac{3[k''^2] - [k^{IV}]}{24} \Theta^4$$

$$- \frac{30[k''^3] - 15[k'' k^{IV}] + [k^{VI}]}{720} \Theta^6 + \cdots.$$

Hiernach ist

$$\varphi(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{[k'']}{2}\Theta^2} \cos z\Theta d\Theta \left\{ 1 - \frac{3[k''^2] - [k^{IV}]}{24} \Theta^4 \right.$$

$$\left. - \frac{30[k''^3] - 15[k'' k^{IV}] + [k^{VI}]}{720} \Theta^6 + \cdots \right\}.$$

Nun hat man aber*)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{[k'']}{2}\Theta^2} \cos z\Theta d\Theta = \sqrt{\frac{2\pi}{[k'']}}\, e^{-\frac{z^2}{2[k'']}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Theta^4 e^{-\frac{[k'']}{2}\Theta^2} \cos z\Theta d\Theta = \frac{\sqrt{2\pi}}{[k'']^{\frac{5}{2}}}\, e^{-\frac{z^2}{[2k'']}} \left(3 - \frac{6z^2}{[k'']} + \frac{z^4}{[k'']^2}\right)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Theta^6 e^{-\frac{[k'']}{2}\Theta^2} \cos z\Theta d\Theta = \frac{\sqrt{2\pi}}{[k'']^{\frac{7}{2}}}\, e^{-\frac{z^2}{2[k'']}} \left(15 - \frac{45z^2}{[k'']} + \frac{15z^4}{[k'']^2} - \frac{z^6}{[k'']^3}\right);$$

---

*) Aus

$$y = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2x^2} \cos rx\,dx$$

ergibt sich durch Differentiation in Bezug auf r

$$\frac{dy}{dr} = -\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-a^2x^2} \sin rx\,dx$$

$$= \frac{1}{2a^2}\left\{e^{-a^2x^2} \sin rx\,dx\right\}_{-\infty}^{\infty} - \frac{r}{2a^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2x^2} \cos rx\,dx,$$

so dass y der linearen Differentialgleichung genügt

$$\frac{dy}{dr} + \frac{r}{2a^2}\, y = 0;$$

die Integration dieser letzteren liefert zunächst

$$y = Ce^{-\frac{r^2}{4a^2}}$$

und die Konstante ergibt sich durch Anwendung auf den Fall $r = 0$, so dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2x^2} \cos rx\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{a} e^{-\frac{r^2}{4a^2}}.$$

Durch vier- und sechsmalige Differentiation dieser Gleichung in Bezug auf r ergeben sich die weiteren Formeln

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-a^2x^2} \cos rx\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{a} D^4\left(e^{-\frac{r^2}{4a^2}}\right)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^6 e^{-a^2x^2} \cos rx\,dx = -\frac{\sqrt{\pi}}{a} D^6\left(e^{-\frac{r^2}{4a^2}}\right).$$

Laplace, Théorie analyt. des Probab., I, art. 25.

daher ist schliesslich

$$\varphi(z) = \frac{e^{-\frac{z^2}{2[k'']}}}{\sqrt{2\pi[k'']}} \left\{ 1 - \frac{3[k''^2] - [k^{IV}]}{24[k'']^2} \left(3 - \frac{6z^2}{[k'']} + \frac{z^4}{[k'']^2} \right) \right.$$

$$\left. - \frac{30[k''^3] - 15[k''k^{IV}] + [k^{VI}]}{720[k'']^3} \left(15 - \frac{45z^2}{[k'']} + \frac{15z^4}{[k'']^2} - \frac{z^6}{[k'']^3} \right) + \cdots \right\}.$$

Das zweite und dritte Glied dieser Entwicklung erlangt seinen grössten Wert für $z = 0$, ihre Summe ist also für jeden anderen Wert von z kleiner als

$$-\frac{1}{\sqrt{2\pi[k'']}} \left\{ \frac{3[k''^2] - [k^{IV}]}{8[k'']^2} + \frac{30[k''^3] - 15[k''k^{IV}] + [k^{VI}]}{48[k'']^3} \right\}.$$

Nun können für jeden Elementarfehler die Grössen $\sqrt{k''}$, $\sqrt[4]{k^{IV}}$, $\sqrt[6]{k^{VI}}$ als von gleicher Ordnung angesehen werden, etwa von der Ordnung der Grösse $\varkappa$, und nach der in der Hypothese ausgesprochenen Voraussetzung sind auch die Grössen k_1'', k_2'', ... k_n'' von einerlei Ordnung; mithin gehört

$[k'']$ zur Grössenordnung $n\varkappa^2$
$[k''^2]$, $[k^{IV}]$ „ „ $n\varkappa^4$
$[k''^3]$, $[k''k^{IV}]$, $[k^{VI}]$ „ „ $n\varkappa^6$,

das erste Glied des obigen Ausdruckes ist also von der Ordnung $\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$, das zweite von der Ordnung $\frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$, und da n als eine sehr grosse Zahl vorausgesetzt worden ist, so sind diese Glieder sehr klein, so dass man unter Vernachlässigung von Gliedern der Ordnung $\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ und jeder höheren

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi[k'']}} e^{-\frac{z^2}{2[k'']}}$$

setzen kann.

Die Hypothese führt also wie die vorige auf die nämliche Exponentialfunktion, welche sich aus der Hypothese des arithmetischen Mittels ergeben hat.

39. **Dritte Hypothese.** Der Fehler einer Beobachtung entstehe durch das Zusammenwirken einer sehr grossen An-

zahl unabhängiger Fehlerquellen, deren jede, wenn sie allein wirkte, Fehler von sehr geringem Betrage hervorbrächte im Vergleich zu jenen, welche aus der Kombination aller übrigen Ursachen hervorgehen.

Nachdem diese Hypothese über das Gesetz der einzelnen Elementarfehler keine weitere Voraussetzung trifft, ist sie umfassender als die beiden vorigen. Sie schliesst nicht allein alle Fehler von sehr kleiner Amplitude, sondern auch Fehler mit endlichem und selbst mit unendlichem Gebiet ein, wenn sie nur in dem in Artikel 34 erörterten Sinne von geringer Bedeutung sind. Von diesem Gesichtspunkte aus kommt der folgenden von Crofton*) gegebenen Theorie ein hoher Grad von Allgemeinheit zu.

Wir denken uns irgend einen der Elementarfehler als das Diminutiv eines Fehlers von endlicher Bedeutung, und es seien die wahrscheinlichen Werte der aufeinander folgenden Potenzen des letzteren

$$k', \quad k'', \quad k''', \quad \ldots,$$

so sind

$$\frac{1}{i}k', \quad \frac{1}{i^2}k'', \quad \frac{1}{i^3}k''', \quad \ldots$$

die entsprechenden Werte für den Elementarfehler, wobei i eine sehr grosse Zahl vorstellt. Nun sind k', k'', k''', ... notwendig endliche Werte, folglich kann der wahrscheinliche Wert der dritten, vierten, ... Potenz des Elementarfehlers dem wahrscheinlichen Werte seiner zweiten Potenz gegenüber vernachlässigt werden**).

---

*) On the Proof of the Law of Errors of Observations. 1870, London Philos. Transact., 160, pag. 175 flg.

**) Dieser Schluss darf auf den wahrscheinlichen Wert der zweiten Potenz gegenüber der ersten deshalb nicht angewendet werden, weil der Mittelwert der ersten Potenz als algebraische Summe einen sehr kleinen oder selbst den Wert Null haben kann, während der Mittelwert der zweiten Potenz als Summe von positiven Beträgen notwendig von Null verschieden und endlich ist.

Es ist wichtig zu bemerken, dass Fehler denkbar sind, welche trotz ihrer sehr geringen Bedeutung von der obigen Theorie ausgeschlossen werden müssen, weil die gedachte Vernachlässigung nicht

In Gleichung (2), Art. 32 ist gezeigt worden, dass das Gesetz eines aus zwei Fehlern x, y, welche ihrer Wirkungsweise nach durch $f(x)$, $g(y)$ charakterisiert sind, zusammengesetzten Fehlers z durch

$$\varphi(z) = g(z) - k' g'(z) + \frac{k''}{2} g''(z) - \frac{k'''}{2 \cdot 3} g'''(z) + \cdots$$

ausgedrückt werden kann, wobei k', k'', k''', ... die Mittelwerte von x, x^2, x^3, ... sind. Versteht man also unter x einen der zahlreichen von einander unabhängigen Elementarfehler und unter y das Ergebnis des Zusammenwirkens aller übrigen, so kann man die rechte Seite dieser Gleichung auf die ersten Glieder beschränken und das Gesetz des Gesamtfehlers durch die Gleichung

$$\varphi(z) = g(z) - k' g'(z) + \frac{k''}{2} g''(z)$$

darstellen. Man erkennt daraus, dass jeder Elementarfehler das Gesetz des Gesamtfehlers in einer Weise beeinflusst, welche einzig und allein von dem Mittelwert seiner ersten und zweiten Potenz wesentlich abhängig ist, dass man also für den vorliegenden Zweck an die Stelle von $f(x)$ irgend ein anderes Gesetz bringen kann, welches die Werte k', k'' ungeändert lässt und gestattet, k''', k^{IV}, ... neben k'' zu

---

platzgreifen darf. Eine Fehlerquelle z. B., welche nur gelegentlich wirksam ist, erzeuge unter $n + 1$ Fällen einmal einen Fehler von bestimmtem endlichen Betrage f; die wahrscheinlichen Werte der ersten, zweiten, dritten Potenz dieses Fehlers

$$\frac{f}{n+1}, \quad \frac{f^2}{n+1}, \quad \frac{f^3}{n+1}, \quad \cdots$$

sind, sofern n sehr gross, thatsächlich sehr klein, der Fehler an sich also von geringer Bedeutung. Und doch darf $\frac{f^3}{n+1}$, $\frac{f^4}{n+1}$, ... neben $\frac{f^2}{n+1}$ nicht vernachlässigt werden. Von der beschriebenen Art sind beispielsweise die durch grobe Irrung entstehenden Fehler. Indessen bedingt dies keine wesentliche Einschränkung der Allgemeinheit, da Fehler dieser Gattung zu wenig zahlreich sein dürften im Vergleich zu der grossen Klasse von Fehlern, welche das im Texte geforderte oder behauptete Verhalten zeigen.

unterdrücken. Diesen Bedingungen entspricht aber die Funktion*)

---

*) Denn es ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\bar{f}(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi(k''-k'^2)}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{(x-k')^2}{2(k''-k'^2)}} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi(k''-k'^2)}} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (x-k') e^{-\frac{(x-k')^2}{2(k''-k'^2)}} dx \right.$$

$$\left. + k' \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-k')^2}{2(k''-k'^2)}} dx \right\} = k',$$

weil das erste der beiden Integrale verschwindet und das zweite den Wert $\sqrt{2\pi(k''-k'^2)}$ hat. Ferner in ähnlicher Darstellung

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2\bar{f}(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi(k''-k'^2)}} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (x-k')^2 e^{-\frac{(x-k')^2}{2(k''-k'^2)}} dx \right.$$

$$\left. + 2k' \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{(x-k')^2}{2(k''-k'^2)}} dx - k'^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-k')^2}{2(k''-k'^2)}} dx \right\} = k'',$$

weil das erste Glied rechts den Wert $k''-k'^2$, das zweite dem vorigen zufolge den Wert $2k'^2$, das dritte aber den Wert k'^2 hat.

Weiter findet man auf ähnlichem Wege

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^3\bar{f}(x)\,dx = k'(3k''-2k'^2)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^4\bar{f}(x)\,dx = 3k''^2 - 2k'^4, \quad \cdots$$

Werte, die im Vergleich zu k'', das von der Ordnung $\frac{1}{i^2}$ ist, thatsächlich ausser Betracht kommen, weil sie von der Ordnung $\frac{1}{i^3}$, $\frac{1}{i^4}$ beziehungsweise sind.

Zu bemerken ist noch, dass $k''-k'^2 > 0$ ist, weil der Mittelwert der Quadrate einer beliebigen Reihe von Zahlen das Quadrat ihres Mittelwerts an Grösse übertrifft; denn es ist

$$\frac{a^2+b^2+c^2+\cdots}{n} - \left(\frac{a+b+c+\cdots}{n}\right)^2$$

$$= \frac{(a-b)^2+(a-c)^2+\cdots+(b-c)^2+\cdots}{n^2} > 0.$$

(1) $$\bar{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(k'' - k'^2)}} e^{-\frac{(x-k')^2}{2(k''-k'^2)}}.$$

Man kann daher die Elementarfehler

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad \ldots,$$

aus welchen sich der Beobachtungsfehler z zusammensetzt und deren mittlere Werte, respective mittlere Quadrate

$$k_1', \quad k_2', \quad k_3', \quad \ldots$$
$$k_1'', \quad k_2'', \quad k_3'', \quad \ldots$$

sein mögen, ersetzen durch Fehler, deren Einfluss durch die Funktionen

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi(k_1''-k_1'^2)}} e^{-\frac{(x_1-k_1')^2}{(2k_1''-k_1'^2)}}, \qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi(k_2''-k_2'^2)}} e^{-\frac{(x_2-k_2')^2}{2(k_2''-k_2'^2)}},$$
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi(k_3''-k_3'^2)}} e^{-\frac{(x_3-k_3')^2}{2(k_3''-k_3'^2)}}, \quad \ldots$$

charakterisiert ist.

Suchen wir zunächst das Gesetz $\varphi_1(z_1)$ des aus den zwei ersten Elementarfehlern zusammengesetzten Fehlers. Setzt man zur Abkürzung

$$2(k_1''-k_1'^2) = \Theta_1^2, \quad 2(k_2''-k_2'^2) = \Theta_2^2, \quad \ldots$$

so wird (s. Art. 31)

$$\varphi_1(z_1) = \frac{1}{\pi\Theta_1\Theta_2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x_1-k_1')^2}{\Theta_1^2}-\frac{(z_1-x_1-k_2')^2}{\Theta_2^2}} dx_1$$

und dies gibt nach Ausführung der Integration*)

*) Ordnet man den Exponenten nach Potenzen von x_1, so wird

$$\varphi_1(z_1) = \frac{1}{\pi\Theta_1\Theta_2} e^{-\frac{(z_1-k_1'-k_2')^2}{\Theta_1^2+\Theta_2^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{\sqrt{\Theta_1^2+\Theta_2^2}}{\Theta_1\Theta_2}x_1 - \frac{k_1'\Theta_2^2-k_2'\Theta_1^2+\Theta_1^2 z_1}{\Theta_1\Theta_2\sqrt{\Theta_1^2+\Theta_2^2}}\right)^2} dx_1,$$

und setzt man

$$\frac{\sqrt{\Theta_1^2+\Theta_2^2}}{\Theta_1\Theta_2}x_1 - \frac{k_1'\Theta_2^2-k_2'\Theta_1^2+\Theta_1^2 z_1}{\Theta_1\Theta_2\sqrt{\Theta_1^2+\Theta_2^2}} = t,$$

so ergibt sich

$$\varphi_1(z_1) = \frac{1}{\pi\sqrt{\Theta_1^2+\Theta_2^2}} e^{-\frac{(z_1-k_1'-k_2')^2}{\Theta_1^2+\Theta_2^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt$$

und schliesslich

$$\varphi_1(z_1) = \frac{1}{\sqrt{\pi(\Theta_1^2+\Theta_2^2)}} e^{-\frac{(z_1-k_1'-k_2')^2}{\Theta_1^2+\Theta_2^2}}.$$

$$(2) \qquad \varphi_1(z_2) = \frac{1}{\sqrt{\pi(\Theta_1^2 + \Theta_2^2)}} e^{-\frac{(z_1 - k_1' - k_2')^2}{\Theta_1^2 + \Theta_2^2}}.$$

Kommt der dritte Fehler x_3 hinzu, so ergibt sich für $z_2 = x_1 + x_2 + x_3$ das Gesetz

$$(3) \qquad \varphi_2(z_2) = \frac{1}{\sqrt{\pi(\Theta_1^2 + \Theta_2^2 + \Theta_3^2)}} e^{-\frac{(z_2 - k_1' - k_2' - k_3')^2}{\Theta_1^2 + \Theta_2^2 + \Theta_3^2}}.$$

Demnach ist das Gesetz des Gesamtfehlers z

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi(\Theta_1^2 + \Theta_2^2 + \cdots)}} e^{-\frac{(z - k_1' - k_2^2 - \cdots)}{\Theta_1^2 + \Theta_2^2 + \cdots}},$$

d. i. wenn man für die Θ ihre Werte wieder einführt,

$$(4) \qquad \varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi([k''] - [k'^2])}} e^{-\frac{(z - [k'])^2}{2([k''] - [k'^2])}}.$$

Wenn positive und negative Fehler mit gleicher Wahrscheinlichkeit hervorgebracht werden können, was in den Fällen, wo konstante und systematische Fehler beseitigt sind, wenigstens näherungsweise zutreffen wird, so ist $[k'] = 0$, und man kommt wieder auf das von Bessel gefundene Resultat

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi[k'']}} e^{-\frac{z^2}{2[k'']}}$$

zurück.

Durch diese Analyse ist also mit den wenigsten Einschränkungen die Exponentialfunktion als eine Grenzform für das Gesetz der Beobachtungsfehler nachgewiesen; gegenüber den früheren Ableitungen lässt sich ihr allerdings der Vorwurf nicht ersparen, dass sie das Exponentialgesetz gewissermaassen vorwegnimmt.

Für den wahrscheinlichen Wert K' von z ergibt sich auf Grund der Entwicklungen der Note pag. 94

$$K' = [k'],$$

für den wahrscheinlichen Wert K'' von z^2

$$K'' = [k''] - [k'^2] + [k']^2,$$

und diese Resultate gibt auch die direkte Rechnung. Bezeichnet man nämlich den Mittelwert einer Grösse u mit $M(u)$*), so folgt aus

*) Diese Bezeichnung soll auch in der Folge beibehalten werden.

$$z = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots,$$

dass

$$M(z) = M(x_1) + M(x_2) + M(x_3) \cdots,$$

d. i.

$$K' = [k'],$$

und aus

$$z^2 = x_1{}^2 + x_2{}^2 + \cdots + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + \cdots$$

ergibt sich

$$M(z^2) = M(x_1{}^2) + M(x_2{}^2) + \cdots + [M(x_i)M(x_{i'})] \qquad (i \lessgtr i')$$

$$= [M(x^2)] + [M(x)]^2 - [M^2(x)],$$

d. i.

$$K'' = [k''] + [k']^2 - [k'^2].$$

40. Crofton hat das obige Resultat noch auf einem andern Wege*) abgeleitet, welchen wir, da er analytisch bemerkenswert ist und den Nachweis, dass beliebig viele Fehler von der Form (1), Art. 39, sich zu einem Gesamtfehler von derselben Form vereinigen, entbehrlich macht, in Kürze andeuten wollen.

Wir denken uns die sämtlichen Elementarfehler $x_1, x_2, \ldots$ nach und nach mit einem beliebigen Fehler x, welchen die Funktion $g(x)$ charakterisieren möge, verbunden; bedienen wir uns dabei für $g'(x)$, $g''(x)$ der Cauchy'schen Symbole $Dg(x)$, $D^2g(x)$, so kann das Gesetz von $z_1 = x_1 + x$ symbolisch durch

$$\varphi_1(z_1) = \left(1 - k_1'D + \frac{k_1''}{2} D^2\right) g(z_1),$$

weiter das Gesetz von $z_2 = x_1 + x_2 + x$ durch

$$\varphi_2(z_2) = \left(1 - k_2'D + \frac{k_2''}{2} D^2\right) \varphi_1(z_2)$$

$$= \left(1 - k_1'D + \frac{k_1''}{2} D^2\right)\left(1 - k_2'D + \frac{k_2''}{2} \cdot D^2\right) g(z_2),$$

u. s. w., endlich das Gesetz des Fehlers $z = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x$ durch

$$\varphi(z) = \left(1 - k_1'D + \frac{k_1''}{2} D^2\right)\left(1 - k_2'D + \frac{k_2''}{2} D^2\right)\left(1 - k_3'D + \frac{k_3''}{2} D^2\right) \cdots g(z)$$

---

*) Eine dritte Ableitung gab er in der Encycl. Britannica, Art. Probability, pag. 781.

dargestellt werden. Beschränkt man sich bei der Entwicklung dieses symbolischen Ausdruckes auf Glieder von der Ordnung k'^2 einschliesslich, so kann

$$1 - k'D + \frac{k''}{2} D^2 = e^{-k'D + \frac{1}{2}(k'' - k'^2) D^2}$$

und daher

$$\varphi(z) = e^{-[k']D + \frac{1}{2}([k''] - [k'^2]) D^2} g(z)$$

gesetzt werden; weil aber

$$e^{-[k']D} g(z) = \left(1 - [k']D + \frac{1}{2}[k']^2 D^2 - \frac{1}{2 \cdot 3}[k']^3 D^3 + \cdots\right) g(z)$$
$$= g(z - [k'])$$

ist, so ist

$$\varphi(z) = e^{\frac{1}{2}([k''] - [k'^2]) D^2} g(z - [k']).$$

Es ist nun noch die Wahl von $g(x)$ zu treffen; nimmt man

$$g(x) = \frac{1}{\Theta \sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{\Theta^2}},$$

so wird

$$\varphi(z) = \frac{1}{\Theta \sqrt{\pi}} e^{\frac{1}{2}([k''] - [k'^2]) D^2} e^{-\frac{(z - [k'])^2}{\Theta^2}}.$$

Die endgiltige Formulierung dieses Ausdruckes setzt nun die Auswertung eines symbolischen Ausdrucks von der allgemeinen Form

$$u = e^{a D^2} e^{-b v^2}$$

voraus. Differentiiert man einmal in Bezug auf a, dann in Bezug auf b, so ergibt sich

$$\frac{\partial u}{\partial a} = e^{a D^2} D^2 (e^{-b v^2}) = e^{a D^2} (4b^2 v^2 - 2b) e^{-b v^2}$$
$$\frac{\partial u}{\partial b} = - v^2 e^{a D^2} e^{-b v^2}$$

und daraus durch Elimination der Glieder in v^2 die lineare partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial a} + 4b^2 \frac{\partial u}{\partial b} = -2bu.$$

Ihre Hilfsgleichungen

$$da = \frac{db}{4b^2} = -\frac{du}{2bu}$$

geben die beiden unabhängigen Integrale

$$4a + \frac{1}{b} = C, \qquad u\sqrt{b} = C',$$

woraus das allgemeine Integral

$$u = b^{-\frac{1}{2}} F\left(4a + \frac{1}{b}\right)$$

folgt. Die willkürliche Funktion F kann hier an der Hand des besonderen Falles $a = 0$ festgestellt werden, für welchen $u = e^{-bv^2}$ ist; man hat in Folge dessen

$$F\left(\frac{1}{b}\right) = b^{\frac{1}{2}} e^{-bv^2}$$

und

$$u = \frac{1}{\sqrt{4ab+1}} e^{-\frac{bv^2}{4ab+1}}.$$

Wenn man diese Formel auf den oben gefundenen Ausdruck für $\varphi(z)$ anwendet, so kommt

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi([k''] - [k'^2] + \Theta^2)}} e^{-\frac{(z-[k'])^2}{2([k''] - [k'^2] + \Theta^2)}}.$$

Der willkürliche Fehler x aber, mit welchem die Elementarfehler verbunden worden sind, kann so geringfügig gewählt werden, als man will; mithin kann man Θ so klein sich denken, dass Θ^2 neben den endlichen Summen $[k'']$, $[k'^2]$ vernachlässigt werden darf, und kommt dadurch wieder auf den früheren Ausdruck zurück. Zur Zulässigkeit der Wahl von $g(x)$ ist allerdings erforderlich, dass die Ableitungen $g'''(x)$, $g^{IV}(x)$, ... nicht unendlich werden, damit die Entwicklung auf die drei ersten Glieder beschränkt werden darf; dieses Erfordernis ist aber bei der oben gewählten Funktion erfüllt.

§ 6. Das Fehlergesetz auf Grund verschiedener Annahmen.

41. Wenn unter den bisher vorgeführten Ableitungen des Fehlergesetzes die erste, von Gauss herrührende, welche auf die Hypothese des arithmetischen Mittels sich stützt, durch grosse Einfachkeit und Klarheit der Schlüsse sich

auszeichnet, so muss den andern, welche von der Annahme ausgehen, dass ein Beobachtungsfehler aus dem Zusammenwirken einer sehr grossen Anzahl unabhängiger Ursachen hervorgehe, der Vorzug eingeräumt werden, dass sie auf die Natur der Fehler sich einlassen; ihr wissenschaftlicher Wert ist höher anzuschlagen. Die eben ausgesprochene Annahme bezeichnet ohne Zweifel die natürlichste und richtigste Ansicht über die Entstehung der Fehler und scheint, wie Glaisher bemerkt, alles einzuschliessen, was man über deren Natur mit einiger Annäherung an die Gewissheit behaupten kann.

Die in zweiter Reihe erwähnten Ableitungen bieten zugleich einen Einblick in die Bedingungen, unter welchen man erwarten kann, dass die einer Reihe von Beobachtungen anhaftenden Fehler dem Exponentialgesetze folgen. Umgekehrt gestattet die Übereinstimmung der Fehler einer Reihe unter anscheinend gleichen Umständen angestellter Beobachtungen mit diesem Gesetze den Schluss, dass jene Bedingungen erfüllt waren.

Anderer Art sind die Ableitungen, mit welchen wir uns jetzt beschäftigen werden; sie gehen von Annahmen aus, die mitunter mit dem zur Frage stehenden Gegenstande in keinem Zusammenhange stehen. Nichtsdestoweniger bieten sie mannigfaches Interesse, teils vom historischen Standpunkte aus, teils deshalb, weil sie bemerkenswerte Eigenschaften des Fehlergesetzes aufdecken.

42. In einer kurzen Notiz*) berichtet Abbe über die Herleitung eines Fehlergesetzes, das im Wesentlichen mit dem Gauss'schen übereinstimmt und 1808, also vor der Theoria motus corp. coel., von Adrain in Neubraunschweig (New Jersey) veröffentlicht worden ist**). Der folgenden Darstellung des bemerkenswerten Versuchs liegen ausser der

---

*) Historical Note on the Method of Least Squares, Americ. Journ. of Science and Arts, I, (1871), pag. 411 flg.

**) Research concerning the probabilities of the errors which happen in making observations, in dem von Adrain selbst herausgegebenen amerikanischen Journal The Analyst or Mathem. Museum, I, pag. 93 flg. — Über einen zweiten Beweis Adrain's s. Art. 155.

erwähnten Notiz die bezüglichen Ausführungen Glaisher's*) zu Grunde.

Angenommen, AB sei der wahre Wert irgend einer Grösse, für welche durch Messung Ab erhalten wurde, so dass Bb der Fehler ist; welches ist der Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit, dass bei der Messung von AB der Fehler Bb begangen wurde?

So die Fragestellung. Die Lösung geschieht wie folgt. „Es seien AB, BC, ... aufeinander folgende Entfernungen, deren durch Messung gefundene Werte Ab, bc ... sind, so dass Cc den Gesamtfehler darstellt; werden nun die Messungen Ab, bc, ... als gegeben betrachtet, ebenso der Gesamtfehler Cc, so wird als selbstverständliches Prinzip angenommen, dass die wahrscheinlichsten Werte von AB, BC proportional sind den Messungen Ab, bc, und dass daher die AB, BC betreffenden Fehler proportional sind diesen Längen oder den Messungsergebnissen Ab, bc**). Wenn man daher die Werte von AB, BC oder von Ab, bc bezeichnet mit a, b, den Gesamtfehler Cc mit E, und die Fehler der Messungen Ab, bc mit x, y, so muss man mit grösster Wahrscheinlichkeit die Gleichung haben: $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$."

Es sei $\varphi(a, x)$ der Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit, dass in der Messung einer Entfernung a der Fehler x sich ereigne; dann ist die Wahrscheinlichkeit des Eintreffens der Fehler x, y in der Messung der Entfernungen a, b das Produkt $\varphi(a, x)\varphi(b, y)$. Sollen nun die Werte von x und y aus den Beziehungen

$$x + y = E$$

$$\varphi(a, x)\varphi(b, y) \text{ ein Maximum}$$

---

*) Memoirs of the R. Astron. Soc., XXXIX, pag. 76 flg.

**) Diese Annahme scheint Adrain aus der seiner Untersuchung an der citierten Stelle vorausgehenden Lösung einer Preisfrage entlehnt zu haben, welche verlangt, aus den gemessenen Seiten und Winkeln eines polygonalen Grundstückes seine Fläche zu berechnen und die wahrscheinlichste Annahme über ihren Fehler zu machen. Die Preisfrage ist von Patterson gestellt, und ihre eben erwähnte Lösung gab Bowditch.

bestimmt werden, so muss dies offenbar zu der Gleichung

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$$

führen. Sollten, wie Adrain bemerkt, mehrere Formen von $\varphi(a, x)$ und $\varphi(b, y)$ dieser Forderung genügen, so wird man die einfachste unter ihnen wählen als diejenige, welcher die grösste Wahrscheinlichkeit zukommt.

Damit $\varphi(a, x)\varphi(b, y)$ in Bezug auf x, y ein Maximum werde unter gleichzeitiger Erfüllung der Bedingung $x + y = E$, muss

$$\frac{\varphi'(a, x)}{\varphi(a, x)} dx + \frac{\varphi'(b, y)}{\varphi(b, y)} dy = 0$$

$$dx + dy = 0$$

sein, woraus man die Gleichung

$$\frac{\varphi'(a, x)}{\varphi(a, x)} = \frac{\varphi'(b, y)}{\varphi(b, y)}$$

folgert.

Adrain schliesst nun, dass diese Gleichung auf die einfachst mögliche Art mit $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$ äquivalent werde, wenn man

$$\frac{\varphi'(a, x)}{\varphi(a, x)} = \frac{mx}{a}, \quad \frac{\varphi'(b, y)}{\varphi(b, y)} = \frac{my}{b}$$

setzt, wobei m eine Konstante bedeutet. Hieraus ergiebt sich durch Integration

$$\varphi(a, x) = e^{c + \frac{mx^2}{2a}},$$

wobei c eine neue Konstante bezeichnet. Adrain bemerkt noch, dass m negativ sein müsse und dass bei entsprechender Wahl der Konstanten $y = e^{-x^2}$ die einfachste Form sei, welche die Natur der Wahrscheinlichkeitskurve ausdrückt.

Zwei gewichtige Einwände werden von Glaisher gegen diese Deduktion erhoben. Einmal ist die Annahme, dass für die wahrscheinlichsten Beträge von x, y die Gleichung $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$ bestehen müsse, völlig willkürlich, und man kann Fälle nachweisen, wo sie nicht zutrifft*). Zum zweiten kann aus der Forderung, dass die Gleichungen

*) Bei der Winkelmessung ist der Fehler im allgemeinen unabhängig von der Grösse des Winkels, bei Längenmessungen ist er, sofern systematische Einflüsse nicht vorkommen, der Quadratwurzel aus der gemessenen Länge proportional.

$$\frac{\varphi'(a, x)}{\varphi(a, x)} = \frac{\varphi'(b, y)}{\varphi(b, y)} \quad \text{und} \quad \frac{x}{a} = \frac{y}{b}$$

äquivalent sein sollen, nur der Schluss

$$\frac{\varphi'(a, x)}{\varphi(a, x)} = F\left(\frac{x}{a}\right), \qquad \frac{\varphi'(b, y)}{\varphi(b, y)} = F\left(\frac{y}{b}\right)$$

gezogen werden, wobei F eine willkürliche Funktion bezeichnet. Hieraus würde als Lösung

$$\varphi'(a, x) = \left\{\chi\left(\frac{x}{a}\right)\right\}^a$$

sich ergeben (wenn const. $e^{\int F\left(\frac{x}{a}\right)\frac{dx}{a}} = \chi\left(\frac{x}{a}\right)$ gesetzt wird), aus welcher nur die Art und Weise, in welcher x und a in φ mit einander verbunden sind, hervorgeht. Die Gewinnung eines Ausdruckes für $\varphi(a, x)$ macht eine spezielle Annahme für F notwendig; um auf $e^{-h^2x^2}$ zu kommen, braucht man aber nur für $F\left(\frac{x}{a}\right)$ eine dem x proportionale Grösse zu nehmen, und man kommt daher zu dem von Adrain gefundenen Resultat auch dann, wenn man an die Stelle der Gleichung $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$ setzt $\frac{x}{f(a)} = \frac{y}{f(b)}$. Diese Gleichung aber, welche nur ausdrückt, dass die wahrscheinlichsten Werte der Fehler x, y irgendwie von den gemessenen Längen abhängen, kann mit den Thatsachen ganz wohl vereinbart werden; darin liegt der Grund, warum trotz der verfehlten Voraussetzung und der nicht genügend strengen Schlüsse ein im Wesen richtiges Resultat erhalten wurde.

43. Eine Ableitung des Fehlergesetzes, die nicht nur vermöge ihrer Einfachheit, sondern insbesondere deshalb einiges Interesse beansprucht, weil sie sich auf Betrachtungen stützt, welche der Natur des Gegenstandes fremd sind und mit der Raumanschauung eng zusammenhängen, hat Herschel bei Gelegenheit einer Besprechung von Quetelet's Lettres sur la Théorie des Probabilités gegeben*). Die Voraus-

1) Edinburgh Review for 1850. — Die Ableitung hat auch in einigen Lehrbüchern Aufnahme gefunden, so in Thomson und Tait's Handbuch der theor. Phys. (deutsch von Helmholtz u. Wertheim), I, 1, pag. 353 und in Natani's kleiner Schrift: Methode der kleinsten Quadrate, pag. 11 flg. Aus ersterer Schrift ist sie auszüglich mitgeteilt von Schlömilch, Zeitschr. f. Math. u. Phys., 17, pag. 87.

setzungen, auf welchen die Ableitung beruht, sind Gegenstand mehrfacher, einander zum Teil widersprechender Kritik geworden*). Herschel hatte eine nicht ganz strenge, mehr populäre Form gewählt; die genaue Darstellung ist Ellis (s. u.) zu verdanken.

Ein Stein wird aus einer Höhe geworfen in der Absicht, eine gegebene Marke zu treffen. Die Abweichung von dieser Marke ist der begangene Fehler.

Die erste Annahme besteht darin, dass die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers nur abhängig sei von seiner Grösse und nicht auch von der Richtung; damit ist zugleich ausgesprochen, dass positive und negative Fehler derselben Grösse in ein und der nämlichen durch die Marke gehenden Geraden gleich wahrscheinlich sind. Bezeichnet demnach r die Grösse des Fehlers, so ist seine Wahrscheinlichkeit proportional einer geraden Funktion von r, etwa $f(r^2)$.

Dies allein reicht aber zur Bestimmung von f nicht aus. Es wird nun die folgende zweite Annahme gemacht. Denkt man sich durch die Marke O in der Ebene, auf welcher sie angebracht ist, ein rechtwinkliges Axenpaar XOY gelegt, und sind x, y die Koordinaten des Punktes, in welchem der Stein auffällt, so kann seine Abweichung r betrachtet werden als ein zusammengesetztes Ereignis, bestehend in dem Zusammentreffen der von einander unabhängigen Abweichungen x, y in Richtung der Axen X, Y.

Die Richtigkeit dieser Annahme zugegeben stellt $f(x^2)dx$ die Wahrscheinlichkeit einer zwischen den Grenzen x und $x + dx$ liegenden Abweichung parallel zur X-Axe, $f(y^2)dy$ die Wahrscheinlichkeit einer Abweichung parallel zur Y-Axe im Betrage von y bis $y + dy$, und $f(x^2)f(y^2)dxdy$ die Wahrscheinlichkeit dar, dass der Stein die Ebene innerhalb des Rechtecks $dxdy$ treffen werde, dessen dem Ursprung zunächst liegende Ecke die Koordinaten x, y hat. Da nun alle Abweichungen gleicher Grösse dieselbe Wahrscheinlichkeit

*) Ellis, London Philos. Magaz., XXXVII, pag. 321 flg. — Boole, Edinburgh Transact., XXI, pag. 627 flg. — Glaisher, Mem. of the R. Astron. Soc., XXXIX, pag. 112 flg. — Donkin, London Philos. Magaz., II (1852), pag. 55 flg.

besitzen, so bleibt dieser Ausdruck so lange unverändert, als $x^2 + y^2$ es bleibt. Denkt man sich also das Rechteck so gelegt, dass seine der Marke O zunächstliegende Ecke die Koordinaten o, $\sqrt{x^2 + y^2}$ hat, so nimmt die darauf bezügliche Wahrscheinlichkeit den Ausdruck $f(o)f(x^2 + y^2)dxdy$ an, und zur Bestimmung der unbekannten Funktion f ergibt sich die Gleichung

$$f(x^2)f(y^2) = f(o)f(x^2 + y^2).$$

Differentiiert man dieselbe partiell in Bezug auf x^2, dann in Bezug auf y^2, so erhält man mit Berufung auf einen bekannten Satz

$$f'_{x^2}(x^2)f(y^2) = f'_{y^2}(y^2)f(x^2),$$

woraus weiter

$$\frac{f'_{x^2}(x^2)}{f(x^2)} = \frac{f'_{y^2}(y^2)}{f(y^2)} = m$$

folgt, wenn m eine Konstante bezeichnet. Die Integration gibt

$$f(x^2) = Ae^{mx^2}.$$

Da der Wert von x zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ notwendig liegen muss, so ist

$$A\int_{-\infty}^{\infty} e^{mx^2} dx = 1,$$

die Konstante m muss daher negativ sein; wir setzen $m = -h^2$ und finden $A = \frac{h}{\sqrt{\pi}}$, so dass schliesslich

$$f(x^2) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2}.$$

Die Annahme aber, auf welcher der Ansatz der zur Bestimmung von f führenden Gleichung

$$f(x^2)f(y^2) = f(o)f(x^2 + y^2)$$

beruht, lässt sich nicht rechtfertigen. Die Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen zweier Ereignisse ist nur dann dem Produkte ihrer einfachen Wahrscheinlichkeiten gleich, wenn die Ereignisse von einander unabhängig sind. Es müsste also, um die Berechtigung jener Gleichung darzuthun, der Beweis geliefert werden, dass die relative Wahrscheinlichkeit

einer Abweichung y parallel zur Y-Axe dieselbe bleibt, welchen Wert auch die Abweichung x in der andern Axenrichtung haben möge; hiefür ist aber kein Anhalt vorhanden, weder bei einem rechtwinkligen noch bei einem schiefwinkligen Axenkreuz; die unmittelbare Anschauung spricht vielmehr dagegen*).

Aber auch dann, wenn man die Stichhaltigkeit jener Annahme zugeben wollte, bliebe immer noch die Frage offen, ob die Funktion f das Gesetz jeglicher Art von Beobachtungsfehlern darstelle. Herschel erledigt diese Frage dadurch, dass er die Behauptung aufstellt, „das Gesetz müsse ein allgemeines, auf alle Fälle gleich anwendbares sein, weil die Ursachen der Fehler in allen Fällen gleich unbekannt sind“. Hierzu bemerkt Ellis sehr treffend, dass erstens unsere Unkenntnis der Fehlerursachen nicht so gross sei, dass wir aber sehr guten Grund hätten anzunehmen, sie wirkten in verschiedenen Gattungen von Beobachtungen verschieden, und zweitens, dass die völlige Unkenntnis keinen Grund abgeben könne zu was immer für einer Folgerung. Aus nichts kann nichts abgeleitet werden.

Ellis hat übrigens zur Widerlegung der Behauptung, das Gesetz der Fehler sei ein allgemeines, den vorliegenden besonderen Fall selbst benützt. Um die Wahrscheinlichkeit einer zwischen den Grenzen r und $r + dr$ eingeschlossenen Totalabweichung zu erhalten, hat man den Ausdruck $\frac{h^2}{\pi} e^{-h^2(x^2+y^2)} dx\,dy$, welcher die auf das Flächenelement $dx\,dy$ bezügliche Wahrscheinlichkeit darstellt, auf dem Gebiete $r \leqq \sqrt{x^2+y^2} \leqq r + dr$ zu integrieren. Dies gibt, wenn man Polarkoordinaten einführt,

$$\frac{h^2}{\pi} e^{-h^2 r^2} r\,dr \int_0^{2\pi} d\varphi,$$

d. i. $2h^2 e^{-h^2 r^2} r\,dr$. Während also die Abweichung parallel

*) Bertrand führt den Fall als Illustration der falschen Anwendung des im Texte angeführten Fundamentalsatzes der Wahrscheinlichkeitsrechnung an, Calc. des Probab. pag. 29 und Comptes rendus, CVI, pag. 232.

zu einer der Axen dem Gesetz $\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2}$ unterworfen ist, befolgt die Abweichung von der Marke ein ganz anderes Gesetz, nämlich $2h^2 e^{-h^2r^2} r$.

Boole, welcher die Herschel'sche Ableitung verteidigt hat und in ihrem Resultat eine deutliche Bestätigung der harmonischen Beziehungen erblicken wollte, welche so ganz verschiedene Gebiete unseres Denkens mit einander verbinden, führt u. a. das Folgende „als eine bemerkenswerte Bestätigung" der Richtigkeit des Resultates an. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Stein die Ebene in dem Rechtecke $dx\,dy$, das an den Punkt x, y als Eckpunkt sich anschliesst, treffen werde, ist $\frac{h^2}{\pi} e^{-h^2(x^2+y^2)} dx\,dy$; die Wahrscheinlichkeit, dass er die Ebene irgendwo im Abstande x bis $x + dx$ von der Y-Axe erreiche, muss sich hieraus durch Integration in Bezug auf y zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ ergeben. Da nun diese Wahrscheinlichkeit gleich gefunden worden ist $\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2} dx$, so müsste

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{h^2}{\pi} e^{-h^2(x^2+y^2)} dx\right) dy = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2} dx$$

sein, und dies ist in der That der Fall. Es ist aber auch ganz selbstverständlich; denn die Funktion f ist derart bestimmt worden, dass sie der Bedingung

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x^2) dx = 1$$

Genüge leiste, und daraus folgt mit Notwendigkeit

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{f(x^2)dx\} f(y^2)dy = f(x^2)dx.$$

Herschel hat gelegentlich seiner in Rede stehenden Arbeit behauptet, wenn man gegen eine an einer Wand befestigte Marke Schüsse abfeuert (oder einen Stein wirft) in der Absicht, die Marke zu treffen, so ergebe sich nach Entfernung der Marke deren wahrscheinlichste Lage als Schwer-

punkt des Systems der Treffpunkte. Ellis, in Folge einer irrigen Schlussweise*), widersprach erst dieser Behauptung, erkannte aber später ihre Richtigkeit an**). Eine sehr klare Darlegung dieses Satzes hat Glaisher gegeben. Es seien $A_1, A_2, \ldots A_n$ die Treffpunkte, $r_1, r_2, \ldots r_n$ ihre Entfernungen von der Marke O. Man denke sich um jeden der Punkte A eine sehr kleine Fläche α beschrieben. Alsdann ist a priori die Wahrscheinlichkeit, dass n Schüsse oder Würfe die Wand in den bezeichneten Punkten treffen,

$$\left(\frac{h^2}{\pi}\right)^n e^{-h^2(r_1^2+r_2^2+\cdots+r_n^2)}\alpha^n,$$

folglich die Wahrscheinlichkeit a posteriori, dass O die Marke war, wenn die Wand in den Punkten $A_1, A_2, \ldots A_n$ wirklich getroffen wurde, proportional $e^{-h^2(r_1^2+r_2^2+\cdots+r_n^2)}$ und am grössten, wenn $r_1^2 + r_2^2 + \cdots + r_n^2$ ein Minimum; diese Beziehung charakterisiert aber thatsächlich den Schwerpunkt des Systems $A_1, A_2, \ldots A_n$.

44. In einer Abhandlung, welche gewisse Analogieen zwischen wahrscheinlichkeitstheoretischen Untersuchungen einerseits und statischen andererseits zum Gegenstande hat, ist von Donkin***) eine Ableitung des Fehlergesetzes gegeben worden, welche, wenn sie auf grosse Beweiskraft auch keinen Anspruch erheben kann, in mehrfacher Hinsicht der Beachtung würdig ist. Donkin's Schlussweise ist im Wesen die folgende.

Wenn zwei Beobachtungen für eine unbekannte Grösse x die Werte a und b ergeben haben, und es liegt kein Grund

---

*) Er betrachtet $2h^2e^{-h^2r^2}r\,dr$ als Wahrscheinlichkeit a priori einer bestimmten Lage des Treffpunktes im Abstande r von der Marke; dann allerdings wäre die wahrscheinlichste Lage von O diejenige, für welche

$$e^{-h^2(r_1^2+r_2^2+\cdots+r_n^2)}r_1 r_2 \cdots r_n \text{ ein Maximum,}$$

also verschieden vom Schwerpunkt. Aber $2h^2e^{-h^2r^2}r\,dr$ ist, wie aus der Ableitung dieses Ausdrucks hervorgeht, nicht die Wahrscheinlichkeit einer bestimmten, sondern die irgend einer Lage des Treffpunktes im Abstande r von O.

**) l. c. pag. 462.

***) Quarterly Journ., I, pag. 152 flg.

vor in den einen mehr Vertrauen zu setzen als in den andern, dann ist, so lange keine neuen Aufschlüsse vorliegen, offenbar $\frac{a+b}{2}$ der wahrscheinlichste Wert von x, weil kein Grund vorhanden ist einen Wert als solchen anzunehmen, welcher einem der Werte a, b näher liegt als dem andern.

Beide Beobachtungen werden als in jedem Betracht von gleicher Art vorausgesetzt; wenn daher $\varphi(x-a)dx$ die von der ersten Beobachtung herrührende Wahrscheinlichkeit bedeutet, dass der wahre Wert von x zwischen x und $x+dx$ liege, so wird $\varphi(x-b)dx$ die entsprechende auf die zweite Beobachtung gegründete Wahrscheinlichkeit sein. Daraus folgt

$$C\varphi(x-a)\varphi(x-b)dx$$

als Ausdruck für die aus den vereinigten Beobachtungen abgeleitete Wahrscheinlichkeit. C bedeutet eine Konstante, deren Wert sich daraus ergibt, dass das Integral des obigen Ausdrucks, zwischen den Grenzen von x genommen, der Einheit gleichkommen muss.

Da andererseits der wahrscheinlichste aus den vereinigten Beobachtungen abgeleitete Wert von x gleich $\frac{a+b}{2}$ sein muss, „so erscheint es als eine natürliche und einleuchtende Annahme (ich gebe nicht vor, dass es keine Annahme sei), dass die Wahrscheinlichkeit, x liege zwischen x und $x+dx$, ausdrückbar sein müsse in der Form

$$\chi\left(x-\frac{a+b}{2}\right)dx,$$

so dass

$$(1) \qquad C\varphi(x-a)\varphi(x-b)=\chi\left(x-\frac{a+b}{2}\right).\text{“}$$

Setzt man, um auf Grund dieser Annahme die Form von φ herzustellen, $b=a$, so wird

$$\chi(x-a)=C'\{\varphi(x-a)\}^2,$$

weil die Konstante für diese Annahme nicht denselben Wert haben muss wie vorhin. Hiermit wird aus (1), wenn k eine neue Konstante bezeichnet,

$$\varphi(x-a)\varphi(x-b)=k\left\{\varphi\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\right\}^2.$$

Durch logarithmische Differentiation und wenn man zur Abkürzung $\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = \psi(z)$ setzt, ergibt sich daraus

$$\psi(x-a) + \psi(x-b) = 2\psi\left(x - \frac{a+b}{2}\right)$$

und mit der Annahme $b = -a$

$$\psi(x-a) + \psi(x+a) = 2\psi(x).$$

Diese Gleichung erfordert aber, dass $\psi''(x)$ (und jeder höhere Differentialquotient gerader Ordnung) für alle Werte von x verschwinde; folglich ist $\psi(x) = A + Bx$ und daher

$$\varphi(x) = Ce^{Ax + \frac{1}{2}Bx^2}.$$

Aus der Grundbedingung aber, dass $\varphi(x)$ ein Maximum werden soll für $x = 0$, folgt $A = 0$, und aus

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,dx = 1$$

schliesst man, dass B negativ sein muss ($B = -2h^2$) und dass $C = \frac{h}{\sqrt{\pi}}$. Damit ergibt sich

$$\varphi(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2}. \tag{2}$$

Anschliessend hieran macht Donkin die Bemerkung, das Äusserste, was durch solch einen Prozess erlangt werden kann, bestehe nicht darin, dass das unbekannte Fehlergesetz wirklich durch eine Funktion von der gefundenen Form ausgedrückt ist, sondern dass bei unbekannt bleibendem Gesetz das wahrscheinlichste Resultat erhalten wird, indem man so vorgeht, als ob man wüsste, dass jenes die fragliche Form besitze. Es ist nicht zu erkennen, welcher Unterschied zwischen diesen zwei Deutungen dem Wesen nach bestehen soll, und auch der zur Erläuterung gegebene Vergleich macht ihn nicht klar, weil er sich mit dem vorliegenden Falle nicht deckt. Donkin bemerkt nämlich, wenn aus einer Urne, welche nur weisse und schwarze Kugeln enthält, n mal nach einander eine weisse Kugel gezogen wird, so werde niemand ernstlich glauben, der für das Erscheinen einer weissen Kugel

in der nächsten Ziehung durch die Theorie gegebene Bruch $\frac{n+1}{n+2}$ drücke das wirkliche Verhältnis der Anzahl weisser zur Gesamtzahl aller Kugeln aus; er spricht nur die Thatsache aus, dass man jene Wahrscheinlichkeit so rechnen könne, als ob dies der Fall wäre.

Die Sache liegt vielmehr so: Treffen die Voraussetzungen, auf welchen die Ableitung von φ beruht, zu, dann drückt φ das Gesetz der Fehler aus; treffen sie nicht zu, dann gilt auch φ nicht; die Beobachtungsresultate a, b kommen dabei nicht in Betracht. In dem Beispiel mit der Urne ist aber der Bruch $\frac{n+1}{n+2}$ der wahrscheinliche Wert für die Wahrscheinlichkeit des Eintreffens einer weissen Kugel in der nächsten Ziehung, abgeleitet aus den Beobachtungsergebnissen; er macht also auf die Bedeutung des wahren Wertes jener Wahrscheinlichkeit keinen Anspruch.

Von Interesse ist die Eigenschaft von φ, welche durch diese Ableitung aufgedeckt wird und in der Gleichung (1) ihren Ausdruck findet*).

45. Historische Notiz. Schon an einer früheren Stelle (Art. 7) hat sich Gelegenheit geboten, zu bemerken, dass die erste Idee eines Fehlergesetzes sich 1756 bei Simpson vorfindet; mit diesem Namen und Zeitpunkt beginnt denn auch die Anwendung der Wahrscheinlichkeitstheorie auf die Untersuchung der Beobachtungsfehler. Simpson stellt das Gesetz der Fehlerwahrscheinlichkeit geometrisch durch die Schenkel eines gleichschenkligen Drei-

*) Anmerkungsweise soll einer Begründung des Fehlergesetzes gedacht werden, welche Gooss in seiner Inaugural-Dissertation: Zur Begründung der Methode der kleinsten Quadrate, Kreuznach 1865, gegeben hat. Nach einer Kritik der Gauss'schen und Hagen'schen Ableitung unternimmt er den „Versuch einer Entwicklung der (Fehler-) Funktion ohne Position irgend welchen Axioms", wie vorauszusehen ohne Erfolg. Im Laufe der wenig befriedigenden Deduktionen, die auf gewissen aus dem Verhalten zufälliger Fehler gefolgerten Eigenschaften der Wahrscheinlichkeitskurve beruhen, ist er zu Annahmen bemüssigt, deren metaphysische Bedeutung gar nicht erkennbar ist (s. seine Gleichung (4)).

ecks dar und trägt damit den beiden von ihm zum erstenmale ausgesprochenen Thesen: 1) dass positive und negative Fehler gleich wahrscheinlich seien und 2) dass es gewisse Grenzen gebe, innerhalb welcher alle Fehler eingeschlossen sind — in einfachster Weise Rechnung.

Bei seinem ersten Versuche, eine Regel für die Kombination der Beobachtungen aus der Wahrscheinlichkeitstheorie abzuleiten, gelangte Laplace*) zu der Annahme, die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers zwischen x und $x + dx$ komme gleich $\frac{m}{2} e^{-mx} dx$, in welchem Ausdrucke x immer positiv zu nehmen ist**). Denn die Kurve $y = \frac{m}{2} e^{-mx}$ genüge den drei Eigenschaften, welche die Wahrscheinlichkeitskurve notwendig haben muss: 1) Symmetrie gegen die Y-Axe; 2) asymptotische Annäherung an die X-Axe; 3) Gesamtfläche 1. Diese Kurve schneidet jedoch die Y-Axe im Abstande $\frac{m}{2}$ vom Ursprung unter einem Winkel, dessen Tangente $\frac{2}{m^2}$ ist, fällt daher rasch gegen die X-Axe ab, und dieses Verhalten entspricht keineswegs demjenigen, welches man den Fehlern a priori zuschreiben muss. Wie Glaisher***) gezeigt hat, würde dieses Fehlergesetz zu dem eigentümlichen Resultate führen, dass der wahrscheinlichste Wert einer direkt beobachteten Grösse, abgeleitet aus einer ungeraden Anzahl arithmetisch geordneter Beobachtungen, mit der mittelsten zusammenfällt, während bei einer geraden Zahl ebenso geordneter Beobachtungen jeder Wert, welcher zwischen den zwei mittelsten Beobachtungen liegt, mit gleichem Rechte als der wahrscheinlichste anzusehen wäre. Dies fällt vollständig überein mit der von Estienne aufgestellten Regel (s. Art. 22).

---

*) Mémoire sur la probabilité des causes par les évènemens, 1741, Mém. Acad. Paris, par divers Savans, IV, pag. 634 flg.

**) Um die Form einer geraden Funktion herzustellen, wie es der ersten der folgenden Eigenschaften entspricht, kann man, wie Glaisher bemerkt hat, $\frac{m}{2} e^{-m\sqrt{x^2}}$ schreiben. Mem. of the R. Astron. Soc., XXXIX, pag. 121.

***) Ibid., pag. 122.

Estienne*) ist zu dem allgemeineren Resultate gekommen, dass der wahrscheinlichste Wert der unbekannten Grösse z immer dann durch die obige Regel gegeben ist, wenn die Wahrscheinlichkeit, die Beobachtung habe einen zwischen a und $a+dx$ liegenden Wert ergeben, die Form $Ke^{-|f(z)-f(a)|}\,dx$ hat, wobei f nur der einen Bedingung unterworfen ist, in der Umgebung von z monoton zu sein. Das obige Gesetz fällt in der That unter diese Form, da $x = z - a$, so dass man für $\frac{m}{2}\,e^{-|mx|}\,dx$ schreiben kann $\frac{m}{2}\,e^{-|mz-ma|}\,dx$.

Daniel Bernoulli**) kam den wirklichen Verhältnissen wesentlich näher durch die Annahme, dass die Wahrscheinlichkeit, einen Fehler von der Grösse x zu begehen, proportional sei $\sqrt{r^2 - x^2}$, wobei r eine gewisse Konstante bedeutet, für deren Wertangabe er Anhaltspunkte gibt; dieser Annahme entspricht als Wahrscheinlichkeitskurve ein Halbkreis. Wie früher erwähnt worden (Art. 7), hat Bernoulli für die Bestimmung des besten Resultates für eine direkt beobachtete Grösse dasselbe Prinzip aufgestellt, das später von Gauss in der Theoria motus corp. coel. angewendet worden ist, und sich dadurch der modernen Theorie, welche mit Gauss beginnt (1809), genähert. Indem er dieses Prinzip mit seinem Fehlergesetz in Verbindung bringt, findet er bei zwei Beobachtungen das arithmetische Mittel, gelangt aber bei drei und mehr Beobachtungen zu unpraktikabeln Gleichungen, woraus er auf die Unbestimmtheit des Problems schliessen zu sollen glaubt.

§ 7. Beurteilung einer Beobachtungsreihe auf Grund der wahren Fehler.

46. Das Fehlergesetz

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\,e^{-h^2\varepsilon^2} \tag{1}$$

enthält den einzigen Parameter h, welcher mit der Natur der Beobachtungen, mit ihrer Genauigkeit zusammenhängt

*) Étude sur les erreurs d'observat., pag. 22.

**) Anmerkg. zu Art. 7.

und daher auch nur aus den Ergebnissen derselben abgeleitet werden kann.

Zunächst bemerkt man, dass die Wahrscheinlichkeit des Fehlers Null oder eines fehlerfreien Beobachtungsresultats proportional ist der Grösse $\frac{h}{\sqrt{\pi}}$ oder der Grösse h. Man wird aber eine Beobachtungsreihe als genauer bezeichnen im Vergleich zu einer andern, wenn bei der ersten ein fehlerfreies Resultat eher zu erwarten ist als bei der zweiten.

Wir betrachten ferner zwei Beobachtungsreihen, deren Fehler dasselbe Gesetz, der Form nach, befolgen; die Parameter seien h' und h''. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler einer Beobachtung in der ersten Reihe dem absoluten Betrage nach kleiner sei als α', ist

$$\frac{h'}{\sqrt{\pi}}\int_{-\alpha'}^{\alpha'} e^{-h'^2\varepsilon^2}\,d\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\alpha'h'} e^{-t^2}\,dt = \Theta(\alpha'h');$$

für die zweite Reihe und die Fehlergrenze α'' ist sie

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\alpha''h''} e^{-t^2}\,dt = \Theta(\alpha''h'').$$

Beide Wahrscheinlichkeiten sind einander gleich, wenn $\alpha'h' = \alpha''h''$. Nun wird man, bei irgend einer Wahrscheinlichkeit, die erste Reihe für die genauere erklären, wenn ihr die engeren Fehlergrenzen entsprechen; dann aber kommt ihr der obigen Beziehung zufolge das grössere h zu. Insbesondere nennt man diejenige Fehlergrenze r, welcher die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ zukommt, den wahrscheinlichen Fehler*) der Beobachtungsreihe und hat für den Zusammenhang desselben mit dem Parameter h die Gleichung

*) Der Begriff des wahrscheinlichen Fehlers wird zum erstenmale erwähnt 1815 von Bessel: Über den Ort des Polarsterns, Berl. Astron. Jahrb. 1818, pag. 233 flg., und 1818 näher definiert in den „Untersuchungen über die Bahn des Olbers'schen Kometen“, Abhandl. der Berliner Akad. für die Jahre 1812—13, pag. 117 flg. der mathem. Abteil.

(2) $$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{rh} e^{-t^2}\,dt = \frac{1}{2};$$

die weiter unten besprochene Tafel I (am Ende des Buches) der linksseitigen Funktion mit der oberen Grenze als Argument gestattet durch Interpolation die zugehörige obere Grenze zu finden und gibt

(3) $$rh = 0{,}476936\cdots,$$

welche Konstante wegen ihres häufigen Gebrauchs in der Folge mit ϱ bezeichnet werden möge.

Diese Betrachtungen lassen zunächst nur erkennen, dass, unter sonst gleichen Umständen*), die Genauigkeit umso grösser ist, je grösser der Parameter h. Eine nähere Beziehung zwischen beiden ergibt sich aber erst, wenn man eine Definition der Genauigkeit aufgestellt hat.

47. Ehe dies geschieht, erscheint es notwendig, über die in der vorausgehenden Betrachtung aufgetretene Funktion

(1) $$\Theta(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-t^2}\,dt,$$

über ihre Berechnung und die Tabellen ihrer Specialwerte einiges anzuführen. Sie ist das Produkt des konstanten Faktors $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$ mit der einfacheren Funktion $\int_0^t e^{-t^2}\,dt$, welch letztere vermöge der grossen Bedeutung, die ihr in der Physik, so in der Refraktionstheorie, in der Theorie der Wärmeleitung, vor allem aber in der Fehlertheorie zukommt, von Glaisher**)

*) Hierbei denken wir an die Einheit, in welcher die Fehler ausgedrückt sind. Wird diese k mal kleiner genommen, so werden alle Fehler und die bestimmten Wahrscheinlichkeiten entsprechenden Fehlergrenzen, somit auch der wahrscheinliche Fehler durch k mal grössere Zahlen ausgedrückt sein; vermöge der Beziehung $rh = \varrho$ muss h daher k mal kleiner sein.

**) In der Abhandlung: On a Class of Definite Integrals, Philos. Magaz., XLII, pag. 294 und 421 flg., in welcher eine Reihe bestimmter Integrale behandelt wird, die sich auf die obige Funktion zurückführen lassen.

den trigonometrischen Funktionen unmittelbar an die Seite gestellt und wie diese unter die elementaren transcendenten Funktionen gezählt wird. Glaisher hat zugleich eine besondere Bezeichnung für dieselbe eingeführt und in seinen Schriften angewendet; er setzt

$$\int_t^\infty e^{-t^2}\,dt = \mathrm{Erf}\,t \tag{2}$$

(Abkürzung für Error-function) und

$$\int_0^t e^{-t^2}\,dt = \mathrm{Erfc}\,t \tag{3}$$

(Abkürzung für Error-function-complement), so dass

$$\mathrm{Erf}\,t + \mathrm{Erfc}\,t = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \tag{4}$$

und

$$\Theta(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\mathrm{Erfc}\,t. \tag{5}$$

Die nächstliegende Darstellung für Erfc t ergibt sich durch Entwicklung der Exponentialfunktion und gliedweise Integration der Reihe; man findet so

$$\mathrm{Erfc}\,t = t - \frac{t^3}{3} + \frac{1}{1\cdot 2}\frac{t^5}{5} - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{t^7}{7} + \cdots, \tag{6}$$

eine Reihe, welche nur für kleine echt gebrochene Werte von t zur wirklichen Berechnung von Erfc t tauglich ist.

Durch partielle Integration erhält man nach und nach

$$\int_0^t e^{-t^2}\,dt = te^{-t^2} + \frac{2}{1}\int_0^t t^2 e^{-t^2}\,dt$$

$$\int_0^t t^2 e^{-t^2}\,dt = \frac{t^3 e^{-t^2}}{3} + \frac{2}{3}\int_0^t t^4 e^{-t^2}\,dt$$

$$\int_0^t t^4 e^{-t^2}\,dt = \frac{t^5 e^{-t^2}}{5} + \frac{2}{5}\int_0^t t^6 e^{-t^2}\,dt;$$

. . . .

daraus ergibt sich die Entwicklung

$$(7)\quad \operatorname{Erfc} t = t e^{-t^2}\left(1 + \frac{2t^2}{1\cdot 3} + \frac{(2t^2)^2}{1\cdot 3\cdot 5} + \frac{(2t^2)^3}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7} + \cdots\right),$$

die ebenfalls für jeden Wert t konvergent ist, wie man sich durch Untersuchung des Ausdruckes

$$\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdots\frac{2}{2n-1}\int_0^t t^{2n} e^{-t^2}\,dt$$

für ein unendlich wachsendes n überzeugt; die Konvergenz aber beginnt, wenn $2t^2$ einen beträchtlichen Wert erlangt, erst bei so späten Gliedern, dass für grössere Werte von t auch diese Reihe nicht verwendbar ist.

Wird die aus partieller Integration hervorgehende Gleichung

$$\int_t^\infty \frac{e^{-t^2}}{t^{2n}}\,dt = \frac{e^{-t^2}}{2t^{2n+1}} - \frac{2n+1}{2}\int_t^\infty \frac{e^{-t^2}}{t^{2n+2}}\,dt$$

für $n = 0, 1, 2, \ldots$ angeschrieben, so führt die so entstandene Reihe von Gleichungen zu

$$(8)\qquad \operatorname{Erf} t = \frac{e^{-t^2}}{2t}\left(1 - \frac{1}{2t^2} + \frac{1\cdot 3}{(2t^2)^2} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{(2t^2)^3} + \cdots\right)$$

und daraus ergibt sich, indem man von $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ subtrahiert, $\operatorname{Erfc} t$. Diese Reihe wird wohl schliesslich divergent; nichtsdestoweniger kann sie zur Berechnung von $\operatorname{Erf} t$ benützt werden, wenn man bei einem Gliede abbricht, dessen Absolutwert genügend klein ist, um vernachlässigt werden zu können, weil dann die Summe der nachfolgenden Glieder, wie gleich gezeigt werden soll, kleiner ist als dieses Glied. Führt man nämlich die Reihe bis zu dem Gliede

$$(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)e^{-t^2}}{2^n t^{2n-1}},$$

so ist

$$(-1)^n \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n}\int_t^\infty \frac{e^{-t^2}}{t^{2n}}\,dt$$

das hinzuzufügende Restglied; es ist aber

$$\int_t^\infty \frac{e^{-t^2}}{t^{2n}}\,dt < e^{-t^2}\int_t^\infty \frac{dt}{t^{2n}} = \frac{e^{-t^2}}{(2n-1)t^{2n-1}},$$

mithin thatsächlich

$$\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n}\int_t^\infty \frac{e^{-t^2}}{t^{2n}}\,dt < \frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)e^{-t^2}}{2^n t^{2n-1}}.$$

Der durch die Reihe vertretene zweite Faktor der rechten Seite von (8) kann, wie Laplace*) zuerst gezeigt hat, durch einen unendlichen Kettenbruch ersetzt werden, wodurch eine neue Darstellung von Erf t erhalten wird. Geht man nämlich von der Funktion

$$U = e^{t^2}\int_t^\infty e^{-t^2}\,dt = e^{t^2}\,\mathrm{Erf}\,t \tag{9}$$

aus, so gibt einmalige Differentiation

$$U' = 2tU - 1; \tag{10}$$

differentiiert man diese Gleichung aufs neue n mal, so kommt man zu der Beziehung

$$U^{(n+1)} = 2tU^{(n)} + 2nU^{(n-1)},$$

welche, wenn man zur Abkürzung

$$\frac{U^{(r)}}{1\cdot 2\cdots r} = U_r$$

setzt, auch in der Form

$$(n+1)\,U_{n+1} = 2tU_n + 2\,U_{n-1}$$

geschrieben werden kann. Hieraus aber schliesst man, dass

$$\frac{2tU_{n-1}}{U_n} = \frac{(n+1)tU_{n+1}}{U_n} - 2t^2$$

oder

$$\frac{U_n}{2tU_{n-1}} = -\frac{\frac{1}{2t^2}}{1-\frac{(n+1)U_{n+1}}{2tU_n}}. \tag{11}$$

---

*) Traité de Mécan. cél., IV, pag. 253 sq. — Théor. anal. des Probab., I, art. 27.

Nun ist wegen (10)

$$2tU = \frac{2tU}{2tU - U_1} = \frac{1}{1 - \frac{U_1}{2tU_0}},$$

weil U, $U^{(0)}$ und U_0, ebenso U' und U_1 identische Symbole sind; wendet man auf den zweiten Teil des Nenners die Formel (11) an, abkürzungsweise $\frac{1}{2t^2} = q$ setzend, so wird

$$2tU = \frac{1}{1 + \frac{q}{1 - \frac{2U_2}{2tU_1}}};$$

auf den zweiten Teil des letzten Nenners lässt sich die Formel (11) von Neuem anwenden, und fährt man in gleicher Weise fort, so kommt schliesslich

$$2tU = \frac{1}{1 + \frac{q}{1 + \frac{2q}{1 + \frac{3q}{1 + \frac{4q}{1 + \cdots}}}}}.$$

Im Hinblick auf Gleichung (9) hat man also

$$\text{(12)} \qquad \operatorname{Erf} t = \frac{e^{-t^2}}{2t} \cdot \frac{1}{1 + \frac{q}{1 + \frac{2q}{1 + \frac{3q}{1 + \frac{4q}{1 + \cdots}}}}}.$$

Allgemein lässt sich der n^{te} Näherungsbruch eines Kettenbruchs von der Form $\frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \cdots}}}$ mittelst der beiden vorangehenden Näherungsbrüche nach dem Schema

$$\frac{Z_n}{N_n} = \frac{b_n Z_{n-1} + a_n Z_{n-2}}{b_n N_{n-1} + a_n N_{n-2}}$$

berechnen; auf den vorliegenden Fall angewendet lautet diese Formel

$$\frac{Z_n}{N_n} = \frac{Z_{n-1} + (n-1) q Z_{n-2}}{N_{n-1} + (n-1) q N_{n-2}}$$

und gibt, weil $\frac{1}{1}$ und $\frac{1}{1+q}$ die zwei ersten Näherungsbrüche sind, nach und nach die Partialwerte

$$\frac{1}{1},\quad \frac{1}{1+q},\quad \frac{1+2q}{1+3q},\quad \frac{1+5q}{1+6q+3q^2},\quad \frac{1+9q+8q^2}{1+10q+15q^2},\quad \ldots$$

für den Kettenbruch in (12). Obwohl diese Entwicklung für alle Werte von q anwendbar ist, so eignet sie sich für die praktische Ausrechnung erst etwa von $q = \frac{1}{4}$ abwärts.

Für eine tabellarische Darstellung von Erf t sind jedoch alle die gefundenen Formeln weniger geeignet. Zu diesem Zwecke ist von dem ersten Berechner einer solchen Tafel und ebenso von späteren Berechnern die aus der Taylorschen Entwicklung von

$$\operatorname{Erf}(t+h) = \int_{t+h}^{\infty} e^{-t^2}\,dt$$

hervorgehende Gleichung

$$(13)\quad \operatorname{Erf}(t+h) = \operatorname{Erf} t - h e^{-t^2}\Big(1 - th + \frac{2t^2-1}{3}h^2 - \frac{2t^3-3t}{6}h^3 + \frac{4t^4-12t^2+3}{30}h^4 - \ldots\Big)$$

angewendet worden, welche gestattet, von einem Werte Erf t ausgehend für eine Reihe nach der Differenz h fortschreitender Werte des Arguments die zugehörigen Funktionswerte zu berechnen. Die Anwendung dieses Verfahrens bedarf jedoch einer Kontrole, welche am einfachsten durch direkte Ausrechnung des Schlusswertes geübt wird; stimmt das Resultat der direkten Rechnung mit dem durch das schrittweise Verfahren gefundenen überein, so ist damit die Richtigkeit der ganzen Wertreihe bestätigt.

Die ersten Tafeln für Erf t (log Erf t und log t^2 Erf t, sämtlich für das Intervall $t = 0{,}00$ bis $t = 3{,}00$) sind von Kramp*) berechnet worden. Auf diese stützen sich teilweise die beiden Tafeln, welche Bessel**) für log t^2 Erf t

*) Analyse des Réfractions Astron. et Terrestres, Strasbourg 1798.

**) Fundam. astron., sect. IV.

(die eine geordnet nach dem Argument t, die andere nach dem Argument $\log t$) gegeben hat. Eine Erweiterung der Kramp'schen Tafel für Erf t, und zwar für das Intervall $t = 3{,}00$ bis $t = 4{,}50$, hat Glaisher*) mittelst der Formel (13) berechnet und durch unabhängige Ausrechnung mehrerer Werte nach Gleichung (12) kontroliert. Wahrscheinlich aus Kramp's Tafel für Erf t ist die Tafel der Werte von

$$\Theta(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \operatorname{Erfc} t$$

hervorgegangen, welche Encke**) berechet hat und die in viele andere Werke übergegangen ist. Die am Schlusse dieses Buches mitgeteilte Tafel I ist auf Grund der Tafel in Bertrand's Calcul des Probab. durch Vergleichung mit Encke's Tafel (welche bis $t = 2{,}00$ reicht) und durch Nachrechnung einer Reihe von Werten unter Zuziehung der oben erwähnten Glaisher'schen Tafel festgestellt worden; Abweichungen, beziehungsweise Versehen haben sich nur an einigen wenigen Stellen gezeigt.

48. Wir kehren nun zu den in Art. 46 begonnenen Betrachtungen zurück.

Man nennt eine Beobachtung k mal genauer als eine andere, wenn bei der ersten die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers zwischen den Grenzen ε und $\varepsilon + d\varepsilon$ ebenso gross ist wie die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers zwischen den Grenzen $k\varepsilon$ und $k(\varepsilon + d\varepsilon)$ bei der zweiten.

Diese Definition entspricht vollkommen der üblichen Auffassung des Wortes Genauigkeit. Wenn bei der Messung einer Geraden ebenso häufig ein Fehler zwischen a und

---

*) Philos. Magaz., XLII. Dies zugleich die Quelle zur näheren Orientierung über den Umfang und die Entstehung der einzelnen Tafeln.

**) Berlin. Astron. Jahrb. 1834. Encke bemerkt zwar pag. 269, seine Tafel sei „unmittelbar aus der Tafel für das Integral $\int e^{-tt}\,dt$ in Bessel's Fundamenta astronomiae hergeleitet"; wie oben bemerkt worden, gibt aber Bessel nicht eine Tafel dieses Integrals, sonder der komplizierteren Funktion $\log t^2 \int e^{-t^2}\,dt$.

$a + 1$ Millimetern zu befürchten ist wie bei einer anderen Messung ein Fehler zwischen a und $a + 1$ Centimetern, so wird man nicht anstehen, der ersten Messung eine zehnmal so grosse Genauigkeit beizulegen als der zweiten.

Um die Genauigkeit einer Beobachtung, welche dem Gesetze

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2} \tag{1}$$

folgt, durch eine Zahl auszudrücken, wählen wir als Einheit der Genauigkeit eine Beobachtung, bei welcher die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers zwischen den Grenzen ε und $\varepsilon + d\varepsilon$ gleich ist

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\varepsilon^2} d\varepsilon;$$

die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers zwischen $k\varepsilon$ und $k(\varepsilon + d\varepsilon)$ ist bei dieser Gattung von Beobachtungen gleich

$$\frac{k}{\sqrt{\pi}} e^{-k^2 \varepsilon^2} d\varepsilon. \tag{2}$$

Die Ausdrücke (1) und (2) werden für beliebige Werte von ε übereinstimmen, wenn $k = h$; der Parameter h drückt also bei dieser Wahl der Einheit unmittelbar die Genauigkeit aus.

Aus diesem Grunde und nach dem Vorschlage von Gauss*) nennt man h das Maass der Genauigkeit oder das Maass der Präzision der Beobachtungen.

Aus dem, was in Art. 46 vorausgeschickt worden, folgt, dass sich die Genauigkeiten zweier Beobachtungsreihen umgekehrt verhalten wie gleich wahrscheinliche Fehlergrenzen, insbesondere auch umgekehrt wie die wahrscheinlichen Fehler.

49. Neben dem Begriff der Genauigkeit einer Beobachtung ist auch der Begriff des Gewichtes gebräuchlich.

Man nennt das Gewicht einer Beobachtung p mal grösser als das einer andern, wenn die Folgerungen, welche man für den Wert der beobachteten Grösse aus einer Beobachtung der ersten Art ziehen kann, gleichwertig sind mit den Folgerungen, welche sich aus p Beobachtungen der zweiten Art ziehen lassen, die sämtlich dasselbe Resultat ergeben haben.

---

*) Theor. mot. corp. coel., art. 178.

Ist p eine gebrochene Zahl, etwa $\frac{r}{s}$, so erfährt die Definition die Abänderung, dass s Beobachtungen der ersten Art gleichwertig sind mit r Beobachtungen der zweiten Art*).

Um für das Gewicht einer Beobachtung, welche dem Gesetze

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2}$$

folgt, eine Zahl zu erhalten, wählen wir wie oben eine Beobachtung von der Art

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\varepsilon^2}$$

als Gewichtseinheit. Die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens von s Fehlern irgend einer Grösse ε bei s Beobachtungen der ersten Art ist proportional

$$e^{-s h^2 \varepsilon^2};$$

die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens von r Fehlern derselben Grösse bei r Beobachtungen der zweiten Art proportional

$$e^{-r \varepsilon^2}.$$

Die Wahrscheinlichkeiten beider Fehlersysteme sind daher proportional und demzufolge gleich für alle Werte von ε, wenn $sh^2 = r$, woraus das Gewicht

$$\frac{r}{s} = h^2$$

folgt; bei der getroffenen Wahl der Gewichtseinheit drückt also h^2 das Gewicht einer Beobachtung der ersten Art aus.

Hieraus, in Verbindung mit den Ergebnissen von Art. 48, ergibt sich, dass die Gewichte zweier Beobachtungen sich verhalten wie die Quadrate ihrer Präzisionsmaasse, dagegen umgekehrt wie die Quadrate gleich wahrscheinlicher Fehlergrenzen, insbesondere der wahrscheinlichen Fehler.

50. Die aufgestellten Definitionen von Genauigkeit und Gewicht haben zur wesentlichen Voraussetzung, dass die Fehler der verglichenen Beobachtungen der Form nach demselben, speziell dem Gauss'schen Gesetze unterliegen. Es

*) Vgl. Donkin, Liouville J., I. sér., XV, pag. 298 und Bertrand, Calc. des Probab., art. 164.

möchte nun die Frage von Interesse sein, ob sie auch für andere und für welche Formen des Fehlergesetzes Geltung haben*).

Gesetzt, es seien zwei Reihen von Beobachtungen gegeben. In der ersten sei die Wahrscheinlichkeit eines zwischen den Grenzen ε und $\varepsilon + d\varepsilon$ enthaltenen Fehlers durch $\varphi(\varepsilon)d\varepsilon$, in der zweiten durch $\chi(\varepsilon)d\varepsilon$ ausgedrückt. Damit nun die Beobachtungen der zweiten Art, verglichen mit jenen der ersten, eine k mal so grosse Genauigkeit und ein p mal so grosses Gewicht besitzen, ist es notwendig und hinreichend, dass die Verhältnisse

$$\frac{\chi(\varepsilon)}{\varphi(k\varepsilon)}, \quad \frac{\chi(\varepsilon)}{\{\varphi(\varepsilon)\}^p}$$

konstant oder unabhängig von ε seien. Daraus folgt, dass die Funktion φ der Relation

$$\frac{\varphi(k\varepsilon)}{\{\varphi(\varepsilon)\}^p} = G$$

genügen müsse, wobei G eine von ε unabhängige Grösse bedeutet. Durch Logarithmierung dieser Beziehung ergibt sich

$$l \cdot \varphi(k\varepsilon) = l \cdot G + pl \cdot \varphi(\varepsilon)$$

und durch Differentiation in Bezug auf ε weiter

$$k\frac{\varphi'(k\varepsilon)}{\varphi(k\varepsilon)} = p\frac{\varphi'(\varepsilon)}{\varphi(\varepsilon)},$$

so dass, wenn man $\frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)} = \psi(u)$ und $p = k^{\mu+1}$ setzt, die Funktion ψ der Gleichung

$$\psi(k\varepsilon) = k^\mu \psi(\varepsilon)$$

zu genügen hat. Daraus schliesst man, dass

$$\psi(\varepsilon) = H\varepsilon^\mu,$$

wo H eine Konstante, oder

$$\frac{\varphi'(\varepsilon)}{\varphi(\varepsilon)} = H\varepsilon^\mu,$$

woraus durch Integration

---

*) Bertrand, Calc. des Probab. art. 165 und Compt. rend., CV, pag. 1099.

$$l \cdot \varphi(\varepsilon) = \frac{H}{\mu + 1} \varepsilon^{\mu + 1} + l \cdot C$$

und

$$\varphi(\varepsilon) = Ce^{-a\varepsilon^{\mu + 1}}$$

sich ergibt; dabei ist abkürzend $\frac{H}{\mu + 1} = -a$ gesetzt worden. Damit $\varphi(-\varepsilon) = \varphi(\varepsilon)$ sei, muss $\mu + 1$ eine gerade Zahl vorstellen.

Das Gauss'sche Gesetz ist ein spezieller Fall dieses allgemeinen und entspricht der Annahme $\mu = 1$; hier ist also $p = k^2$, das Gewicht gleich dem Quadrat der Präzision.

Ausser der obigen Form gibt es kein anderes Fehlergesetz, bei welchem die Begriffe von Genauigkeit und Gewicht im Sinne der gegebenen Definition strenge Bedeutung hätten.

51. Bei der Bestimmung des Präzisionsmaasses h sind zwei Fälle zu unterscheiden, jenachdem die wahren Fehler oder die Beobachtungsfehler im eigentlichen Sinne als bekannt vorausgesetzt werden oder nur die scheinbaren Fehler, nämlich die Unterschiede zwischen den einzelnen Beobachtungen und dem aus ihnen für die beobachtete Grösse abgeleiteten Resultate.

Wir werden uns zunächst mit dem ersten Fall beschäftigen, weil der zweite, für die Praxis wichtigere, sich auf diesen gründet.

Die nächstliegende Lösung der Aufgabe ist die folgende*). Bei n wirklich ausgeführten Beobachtungen seien die Fehler $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ begangen worden, und es werde angenommen, dass dieselben einem Gesetze von der Form

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2}$$

folgen, in welchem der Parameter h noch unbekannt ist.

Vor Anstellung der Beobachtungen war die Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen der Fehler $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ bei irgend welcher Hypothese über h, wenn man a priori alle

*) Gauss, Zeitschr. f. Astron. u. verw. Wissensch., I, pag. 185 und Encke, Berl. Astron. Jahrb. 1834, pag. 279.

Werte von h als gleich wahrscheinlich betrachten darf, proportional

$$h^n e^{-h^2[\varepsilon\varepsilon]};$$

nach Ausführung der Beobachtungen ist die Wahrscheinlichkeit der über h gemachten Hypothese oder des Wertes h für das Präzisionsmaass demselben Ausdruck proportional. Die günstigste Hypothese ist diejenige, welche diesen Ausdruck zu einem Maximum macht. Sie liefert den wahrscheinlichsten Wert von h, nämlich

$$(1) \qquad h = \sqrt{\frac{n}{2[\varepsilon\varepsilon]}}$$

und hiermit den wahrscheinlichsten Wert des wahrscheinlichen Fehlers

$$(2) \qquad r = \frac{\varrho}{h} = \varrho\sqrt{2}\sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}} = 0{,}674489\cdots\sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}}.$$

Diese Resultate gelten ohne Rücksicht darauf, wie gross die Anzahl n der Beobachtungen ist. Der Grad ihrer Zuverlässigkeit ist aber abhängig von n und umso grösser, je grösser n ist, wie die folgende auf die Voraussetzung eines an sich sehr grossen n sich stützende Betrachtung zeigen wird.

Die Wahrscheinlichkeit einer andern Hypothese über das Präzisionsmaass, etwa $h' = h + \omega$, oder die Wahrscheinlichkeit, dass der wahre Wert von h von dem wahrscheinlichsten um den Betrag ω verschieden sei, ist proportional

$$(h+\omega)^n e^{-(h+\omega)^2[\varepsilon\varepsilon]} \qquad \text{oder} \qquad h^n\left(1+\frac{\omega}{h}\right)^n e^{-\frac{n}{2}\left(1+\frac{\omega}{h}\right)^2},$$

wie man leicht findet, wenn man in den ersten Ausdruck für $[\varepsilon\varepsilon]$ den Wert aus (1) substituiert. Stellt man $\left(1+\frac{\omega}{h}\right)^n$ in Form einer Exponentialgrösse dar, nämlich

$$\left(1+\frac{\omega}{h}\right)^n = e^{n\left(\frac{\omega}{h}-\frac{1}{2}\frac{\omega^2}{h^2}+\frac{1}{3}\frac{\omega^3}{h^3}-\cdots\right)},$$

so geht der obige Ausdruck über in

$$h^n e^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{n\omega^2}{h^2}\left(1-\frac{1}{3}\frac{\omega}{h}+\frac{1}{4}\frac{\omega^2}{h^2}-\cdots\right)}$$

und ist, als Funktion von ω aufgefasst, proportional

$$e^{-\frac{n\omega^2}{h^2}\left(1-\frac{1}{3}\frac{\omega}{h}+\frac{1}{4}\frac{\omega^2}{h^2}-\cdots\right)}.$$

Wenn nun n eine sehr grosse Zahl und $\frac{\omega}{h}$ von der Ordnung $\frac{1}{\sqrt{n}}$ ist, so kann der Faktor $e^{-\frac{n\omega^2}{h^2}\left(-\frac{1}{3}\frac{\omega}{h}+\frac{1}{4}\frac{\omega^2}{h^2}-\cdots\right)}$ durch die Einheit ersetzt werden; wird $\frac{\omega}{h}$ grösser, etwa von der Ordnung $\frac{1}{n^{\frac{\alpha}{2}}}$ $(\alpha < 1)$, so ist $\frac{n\omega^2}{h^2}$ von der Ordnung $n^{1-\alpha}$ und daher $e^{-\frac{n\omega^2}{h^2}}$ so klein, dass die Fortführung des strengen Ausdrucks kein Interesse mehr hat; man kann daher, je grösser n ist, umso genauer die Wahrscheinlichkeit von ω proportional setzen

$$e^{-\frac{n\omega^2}{h^2}}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass das Präzisionsmaass zwischen den Grenzen $h + \omega$ und $h + \omega + d\omega$ enthalten sei, kommt also gleich

$$\frac{1}{h}\sqrt{\frac{n}{\pi}}\, e^{-\frac{n\omega^2}{h^2}}\, d\omega;$$

die Grösse ω befolgt daher bei sehr grossem n das Gauss'sche Gesetz, ihr wahrscheinlichster Wert ist $\omega = 0$ in Übereinstimmung damit, dass (1) den wahrscheinlichsten Wert von h bestimmt.

Das Präzisionsmaass dieser Bestimmung ist

$$\frac{\sqrt{n}}{h},$$

folglich ihr wahrscheinlicher Fehler $\frac{\varrho h}{\sqrt{n}}$, so dass man Eins gegen Eins wetten kann, es liege der wahre Wert des Präzisionsmaasses h zwischen den Grenzen

$$h\left(1 \mp \frac{\varrho}{\sqrt{n}}\right). \tag{3}$$

Daraus ergeben sich die wahrscheinlichen Grenzen des wahrscheinlichen Fehlers r der Beobachtungsreihe $\frac{\varrho}{h\left(1 \mp \frac{\varrho}{\sqrt{n}}\right)}$ oder bis auf Grössen von der Ordnung $\frac{1}{\sqrt{n}}$ genau

$$r\left(1 \mp \frac{\varrho}{\sqrt{n}}\right). \tag{4}$$

Für h und r in (3) und (4) sind die Bestimmungen (1) und (2) einzutragen.

52. Neben dieser auf die wahrscheinlichste und daher günstigste Hypothese gegründeten Bestimmung von h und r lässt sich eine unbegrenzte Anzahl anderer Bestimmungen denken. Es bezeichne $f(\varepsilon)$ irgend eine reelle einwertige Funktion des Fehlers; das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\varepsilon)\varphi(\varepsilon)d\varepsilon$$

drückt den wahrscheinlichen oder mittleren oder durchschnittlichen Wert dieser Funktion aus, d. h. das arithmetische Mittel aller Werte, welche diese Funktion annimmt, wenn man ε alle Werte in der dem Fehlergesetz entsprechenden Verteilung beilegt. Denkt man sich unter $\varphi(\varepsilon)$ speziell das Gauss'sche Gesetz, so wird der Wert jenes Integrals sich als eine bestimmte Funktion von h, etwa $F(h)$, darstellen.

Ist andererseits $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ eine Reihe von n Fehlern, wie sie bei n aufeinander folgenden Beobachtungen sich ergeben haben, so wird dem Satze von Bernoulli zufolge

$$\frac{1}{n}\{f(\varepsilon_1) + f(\varepsilon_2) + \cdots + f(\varepsilon_n)\}$$

umso weniger von $F(h)$ verschieden sein, je grösser n ist, und würde sich mit beständig wachsendem n jenem Betrage als Grenze nähern. Setzt man also näherungsweise für ein endliches n

$$(1) \qquad \frac{1}{n}\{f(\varepsilon_1) + f(\varepsilon_2) + \cdots + f(\varepsilon_n)\} = F(h),$$

so hat man in dieser Gleichung ein Mittel zur approximativen Bestimmung von h und r.

Aber abgesehen von praktischen Rücksichten wird nicht jede Form von $f(\varepsilon)$ gleich gut geeignet sein; entscheiden muss dabei die Grösse des in der Gleichung (1) zu befürchtenden Fehlers.

Die nachfolgende Untersuchung wird sich auf jene Fälle beschränken, wo $f(\varepsilon)$ der absolute Wert einer positiven ganzen Potenz von ε ist; der algebraische Wert eignet sich deshalb nicht, weil für ihn vermöge des Umstandes, dass $\varphi(\varepsilon)$ eine

gerade Funktion ist, $F(h)$ Null und somit die Gleichung (1) illusorisch würde, sobald $f(\varepsilon)$ eine ungerade Potenz von ε bedeutet.

Mit $f(\varepsilon) = |\varepsilon|$ erhält man den Durchschnitt der absoluten Fehler oder den durchschnittlichen Fehler

$$\vartheta = \int_{-\infty}^{\infty} |\varepsilon| \varphi(\varepsilon) d\varepsilon = 2 \int_{0}^{\infty} \varepsilon \varphi(\varepsilon) d\varepsilon; \tag{2}$$

mit $f(\varepsilon) = \varepsilon^2$ ergibt sich der Durchschnitt der Fehlerquadrate oder das Quadrat des mittleren Fehlers μ

$$\mu^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^2 \varphi(\varepsilon) d\varepsilon = 2 \int_{0}^{\infty} \varepsilon^2 \varphi(\varepsilon) d\varepsilon; \tag{3}$$

allgemein mit $f(\varepsilon) = |\varepsilon^m|$ der Durchschnitt der m^{ten} Fehlerpotenzen*)

$$S^{(m)} = \int_{-\infty}^{\infty} |\varepsilon^m| \varphi(\varepsilon) d\varepsilon = 2 \int_{0}^{\infty} \varepsilon^m \varphi(\varepsilon) d\varepsilon. \tag{4}$$

Führt man nun für $\varphi(\varepsilon)$ den speziellen Ausdruck $\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2}$ und gleichzeitig eine neue Variable mittelst der Gleichung

$$h^2 \varepsilon^2 = t$$

ein, so wird

$$S^{(m)} = \frac{1}{h^m \sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty} t^{\frac{m-1}{2}} e^{-t} dt$$

d. i.

$$S^{(m)} = \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{h^m \sqrt{\pi}}. \tag{5}$$

Hiernach ist

$$\begin{aligned} &S^{(1)} = \vartheta = \frac{1}{h\sqrt{\pi}}, \quad S^{(2)} = \mu^2 = \frac{1}{2h^2}, \quad S^{(3)} = \frac{1}{h^3\sqrt{\pi}}, \\ &S^{(4)} = \frac{1 \cdot 3}{2^2 h^4}, \quad S^{(5)} = \frac{1 \cdot 2}{h^5 \sqrt{\pi}}, \quad S^{(6)} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 h^6}, \quad \ldots \end{aligned} \tag{6}$$

---

*) Hiernach sind die $S^{(m)}$ mit geradem Zeiger identisch mit den sonst mit $k^{(m)}$ bezeichneten Grössen; hingegen die $S^{(m)}$ mit ungeradem Zeiger haben eine wesentlich andere Bedeutung.

und man kann zur näherungsweisen Bestimmung von h aus einer beschränkten Anzahl von Beobachtungsfehlern eine der Gleichungen

$$(7)\quad \begin{array}{lll} \frac{[|\varepsilon|]}{n}=\frac{1}{h\sqrt{\pi}}, & \frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}=\frac{1}{2h^2}, & \frac{[|\varepsilon^3|]}{n}=\frac{1}{h^3\sqrt{\pi}}, \\ \frac{[\varepsilon^4]}{n}=\frac{1\cdot 3}{2^2h^4}, & \frac{[|\varepsilon^5|]}{n}=\frac{1\cdot 2}{h^5\sqrt{\pi}}, & \frac{[\varepsilon^6]}{n}=\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3h^6}, \quad \ldots \end{array}$$

benützen.

Zu bemerken ist, dass die aus der zweiten dieser Gleichungen sich ergebende Bestimmung von h zusammenfällt mit derjenigen, welche wir im vorigen Artikel als die wahrscheinlichste erkannt haben.

53. Um nun den Grad der Zuverlässigkeit dieser Formeln schätzen zu können, stellen wir uns die Aufgabe: Die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, dass die Summe der absoluten Werte der m^{ten} Potenzen der Fehler einer sehr grossen Anzahl von Beobachtungen zwischen gegebenen Grenzen enthalten sei.

Die Analyse, welcher wir uns dabei bedienen, ist eine Verallgemeinerung derjenigen, welche Laplace*) für die erste und zweite Potenz der Fehler gegeben hat und schliesst sich an jene an, die in Art. 8 entwickelt worden ist. Sie gilt für jedes Fehlergesetz, welches der Bedingung $\varphi(-\varepsilon)=\varphi(\varepsilon)$ genügt.

Mit Beibehaltung der dort erklärten Bezeichnungen gehen wir von der Reihe aus

$$\varphi(-\alpha\omega)\omega e^{(-\alpha)^m\Theta\sqrt{-1}}+\varphi(-\overline{\alpha-1}\,\omega)\omega e^{(-\overline{\alpha-1})^m\Theta\sqrt{-1}}+\cdots$$
$$+\varphi(o)\omega+\cdots\varphi(\overline{\alpha-1}\,\omega)\omega e^{(\alpha-1)^m\Theta\sqrt{-1}}+\varphi(\alpha\omega)\omega e^{\alpha^m\Theta\sqrt{-1}},$$

ändern in derselben negative Exponenten, falls solche vorkommen (bei ungeradem m) in positive um und erheben zur n^{ten} Potenz; alsdann ist der Koeffizient von $e^{(\zeta+\sigma n)\Theta\sqrt{-1}}$ in der Entwicklung dieser Potenz die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der absoluten Werte der m^{ten} Potenzen von n Beobachtungsfehlern enthalten sei zwischen den Grenzen

*) Théor. analyt. des Probab., II, art. 19. — Vgl. auch Gauss, Zeitschr. f. Astron. u. verw. Wissensch., I, pag. 185 flg.

$(\zeta + \sigma n)\omega^m$ und $(\zeta + \sigma n)\omega^m + \omega^m$; bezeichnen wir diese Wahrscheinlichkeit mit $\psi(\overline{\zeta + \sigma n \omega^m})\omega^m$ und setzen vorübergehend

$$\Phi = \{\varphi(o)\omega + 2\varphi(\omega)\omega e^{\Theta\sqrt{-1}} + 2\varphi(2\omega)\omega e^{2^m\Theta\sqrt{-1}} + \cdots + 2\varphi(\alpha\omega)\omega e^{\alpha^m\Theta\sqrt{-1}}\}^n,$$

so wird

$$\psi(\overline{\zeta + \sigma n \omega^m})\omega^m = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Phi d\Theta e^{-(\zeta+\sigma n)\Theta\sqrt{-1}}.$$

Nun ist, unter gleichzeitiger Entwicklung der Exponentialgrössen in dem Ausdrucke Φ

$$\begin{aligned} l\cdot\{\Phi e^{-\sigma n\Theta\sqrt{-1}}\} &= -\sigma n\Theta\sqrt{-1} \\ &+ nl\cdot\{(\varphi(o)\omega + 2\varphi(\omega)\omega + \cdots + 2\varphi(\alpha\omega)\omega) \\ &+ 2\Theta\sqrt{-1}(1^m\varphi(\omega)\omega + 2^m\varphi(2\omega)\omega + \cdots + \alpha^m\varphi(\alpha\omega)\omega) \\ &- \Theta^2(1^{2m}\varphi(\omega)\omega + 2^{2m}\varphi(2\omega)\omega + \cdots + \alpha^{2m}\varphi(\alpha\omega)\omega) + \cdots\}. \end{aligned}$$

Setzt man $\xi\omega = x$, $\omega = dx$ im Hinblick darauf, dass 1 die kleinste Änderung der ganzen Zahl ξ ist, so sind die in den runden Klammern eingeschlossenen Summen gleichbedeutend mit

$$\int_{-\alpha\omega}^{\alpha\omega} \varphi(x)dx = 1,$$

$$\frac{1}{\omega^m}\int_0^{\alpha\omega} x^m\varphi(x)dx = \frac{S^{(m)}}{2\omega^m}$$

$$\frac{1}{\omega^{2m}}\int_0^{\alpha\omega} x^{2m}\varphi(x)dx = \frac{S^{(2m)}}{2\omega^{2m}}, \quad \cdots$$

und die rechte Seite der obigen Gleichung geht über in

$$-\sigma n\Theta\sqrt{-1} + nl\cdot\left(1 + \frac{S^{(m)}}{\omega^m}\Theta\sqrt{-1} - \frac{S^{(2m)}}{2\omega^{2m}}\Theta^2 + \cdots\right)$$

$$= -\sigma n\Theta\sqrt{-1} + n\left(\frac{S^{(m)}}{\omega^m}\Theta\sqrt{-1} - \frac{S^{(2m)}}{2\omega^{2m}}\Theta^2 + \frac{S^{(m)^2}}{2\omega^{2m}}\Theta^2 - \cdots\right)$$

$$= n\left(\frac{S^{(m)}}{\omega^m} - \sigma\right)\Theta\sqrt{-1} - \frac{S^{(2m)} - S^{(m)^2}}{2\omega^{2m}}n\Theta^2 + \cdots.$$

Wird nun

$$\sigma = \frac{S^{(m)}}{\omega^m}$$

gesetzt und die Entwicklung auf die zweite Potenz von Θ beschränkt, so ergibt sich

$$\psi(nS^{(m)} + \zeta\omega^m)\omega^m = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\Theta e^{-\zeta\Theta\sqrt{-1} - \frac{S^{(2m)} - S^{(m)^2}}{2\omega^{2m}} n\Theta^2}.$$

Mit der vorübergehenden Abkürzung

$$\frac{1}{\sqrt{S^{(2m)} - S^{(m)^2}}} = \beta$$

und wenn man an Stelle von Θ die neue Variable t einführt mittels der Gleichung

$$\Theta = \beta\omega^m t\sqrt{\frac{2}{n}},$$

wird daraus, wenn man die neuen Grenzen als Grössen von der Ordnung $\sqrt{n}$ mit Rücksicht auf die Natur der Funktion unter dem Integralzeichen bis $-\infty$ und $+\infty$ ausdehnt,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \beta\omega^m \sqrt{\frac{2}{n}}\, dt e^{-\beta\zeta\omega^m t\sqrt{\frac{2}{n}}\sqrt{-1} - t^2};$$

nun ist aber

$$t^2 + \beta\zeta\omega^m t\sqrt{\frac{2}{n}}\sqrt{-1} = \left(t + \frac{\beta\zeta\omega^m\sqrt{-1}}{\sqrt{2n}}\right)^2 + \frac{\beta^2\zeta^2\omega^{2m}}{2n}$$

und setzt man $\zeta\omega^m = z$, $\omega^m = dz$, so wird die Wahrscheinlichkeit, dass die betreffende Summe zwischen den Grenzen $nS^{(m)} + z$ und $nS^{(m)} + z + dz$ eingeschlossen sei, gleich

$$\psi(nS^{(m)} + z)dz = \frac{\beta dz}{\pi\sqrt{2n}} e^{-\frac{\beta^2 z^2}{2n}} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-\left(t + \frac{\beta z\sqrt{-1}}{\sqrt{2n}}\right)^2},$$

oder, weil das Integral den Wert $\sqrt{\pi}$ hat, nach Restitution des Wertes für β

$$(1) \quad \psi(nS^{(m)} + z)dz = \frac{dz}{\sqrt{2\pi n(S^{(2m)} - S^{(m)^2})}} e^{-\frac{z^2}{2n(S^{(2m)} - S^{(m)^2})}}.$$

Der wahrscheinlichste Wert von z ist $z = 0$, folglich der wahrscheinlichste Wert von $[|\varepsilon^m|]$ gleich $nS^{(m)}$. Es stellt also der obige Ausdruck die Wahrscheinlichkeit vor, dass $[|\varepsilon^m|]$ sich von seinem wahrscheinlichsten Werte $nS^{(m)}$ um den Betrag z unterscheide, und man sieht, dass dieser Unterschied für jede Form von $\varphi(\varepsilon)$ unter der Voraussetzung, dass n sehr gross ist, das Gauss'sche Fehlergesetz befolgt, wenn nur $\varphi(-\varepsilon) = \varphi(\varepsilon)$.

Das Präzisionsmaass in der Bestimmung $nS^{(m)}$ für $[|\varepsilon^m|]$ ist, wie man aus (1) unmittelbar abliest,

$$\frac{1}{\sqrt{2n(S^{(2m)} - S^{(m)^2})}},$$

daher der wahrscheinliche Fehler dieser Bestimmung

$$\varrho\sqrt{2n(S^{(2m)} - S^{(m)^2})},$$

so dass man Eins gegen Eins wetten kann, es liege $[|\varepsilon^m|]$ zwischen den Grenzen

$$nS^{(m)}\left(1 \mp \varrho\sqrt{\frac{2}{n}\,\frac{S^{(2m)} - S^{(m)^2}}{S^{(m)^2}}}\right). \tag{2}$$

54. Der Ausdruck (1) lässt eine einfache Verifikation zu. Man entnimmt demselben, dass der durchschnittliche Wert von $z^2 = ([|\varepsilon^m|] - nS^{(m)})^2$ gleich ist $n(S^{(2m)} - S^{(m)^2})$ und dieses Resultat wird durch direkte Rechnung bestätigt. Es ist nämlich

$$([|\varepsilon^m|] - nS^{(m)})^2 = [\varepsilon^{2m}] + [|\varepsilon_i^m||\varepsilon_{i'}^m|] - 2nS^{(m)}[|\varepsilon^m|]$$
$$+ n^2 S^{(m)^2}; \qquad (i \lesseqgtr i')$$

nun ist der Durchschnittswert eines jeden ε^{2m} gleich $S^{(2m)}$, der Durchschnittswert eines jeden $|\varepsilon^m|$ gleich $S^{(m)}$, daher der durchschnittliche Wert

des ersten Gliedes		$nS^{(2m)}$
„ zweiten „	*)	$n(n-1)S^{(m)^2}$
„ dritten „		$-2n^2S^{(m)^2}$,

*) Der durchschnittliche oder wahrscheinliche Wert eines Produktes vom Zufall abhängiger Grössen ist gleich dem Produkte der wahrscheinlichen Werte der einzelnen Grössen, wie sich leicht erweisen lässt.

daher der durchschnittliche Wert von $([|\varepsilon^m|] - nS^{(m)})^2$ thatsächlich

$$n(S^{(2m)} - S^{(m)2}).$$

55. Wir wenden nun die Resultate der obigen Untersuchung auf das Gauss'sche Fehlergesetz an. Für dieses Gesetz ist zufolge (5), Art. 52

$$(3)\dagger) \qquad S^{(m)} = \frac{\alpha}{h^m}, \quad S^{(2m)} = \frac{\beta}{h^{2m}}$$

mit den Abkürzungen

$$(3^*) \qquad \alpha = \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}, \quad \beta = \frac{\Gamma\left(\frac{2m+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}.$$

Der wahrscheinlichste Wert des Durchschnitts $\frac{[|\varepsilon^m|]}{n}$ der Absolutwerte der m^{ten} Potenzen einer sehr grossen Anzahl von Beobachtungsfehlern ist hiernach gleich

$$\frac{\alpha}{h^m},$$

und es ist Eins gegen Eins zu wetten, dass sein wahrer Wert enthalten sei zwischen den Grenzen

$$(4) \qquad \frac{\alpha}{h^m}\left(1 \mp \varrho\sqrt{\frac{2}{n}\,\frac{\beta - \alpha^2}{\alpha^2}}\right).$$

Die Bestimmung für h und $r = \frac{\varrho}{h}$, welche sich ergibt, wenn man $\frac{[|\varepsilon^m|]}{n}$ seinem wahrscheinlichsten Werte gleichsetzt, ist

$$(5) \qquad h = \sqrt[m]{\alpha}\sqrt[m]{\frac{n}{[|\varepsilon^m|]}}$$

$$(6) \qquad r = \frac{\varrho}{\sqrt[m]{\alpha}}\sqrt[m]{\frac{[|\varepsilon^m|]}{n}};$$

hingegen sind die wahrscheinlichen Grenzen von h

$$(7) \qquad \sqrt[m]{\alpha}\sqrt[m]{\frac{n}{[|\varepsilon^m|]}}\left(1 \mp \frac{\varrho}{m}\sqrt{\frac{2}{n}\,\frac{\beta - \alpha^2}{\alpha^2}}\right)$$

und die wahrscheinlichen Grenzen von r

---

†) In zusammenhängenden Artikeln wird die Numerierung der Gleichungen fortgeführt.

$$(8)\qquad \frac{\varrho}{\sqrt[m]{\alpha}}\sqrt[m]{\frac{[|\varepsilon^m|]}{n}}\left(1 \mp \frac{\varrho}{m}\sqrt{\frac{2}{n}\,\frac{\beta-\alpha^2}{\alpha^2}}\right);$$

bei der Bestimmung dieser Grenzen, welche aus (2), Art. 53 durch Ausziehung der m^{ten} Wurzel hervorgehen, ist nur bis auf Grössen von der Ordnung $\frac{1}{\sqrt{n}}$ gegangen worden.

Da die Grenzen (8) bei verschiedenen Werten von m immer auf eine und dieselbe Grösse sich beziehen, nämlich auf r, so sind sie unmittelbar vergleichbar. Gauss hat sie (l. c.) für die Fälle $m = 1$ bis $m = 6$ ausgerechnet und gefunden:

Wahrscheinliche Grenzen von r:

$$(9)\qquad \begin{aligned}
m &= 1, & & 0{,}8453473\,\frac{[|\varepsilon|]}{n}\left(1 \mp \frac{0{,}5095841}{\sqrt{n}}\right)\\
m &= 2, & & 0{,}6744897\sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}}\left(1 \mp \frac{0{,}4769363}{\sqrt{n}}\right)\\
m &= 3, & & 0{,}5771897\sqrt[3]{\frac{[|\varepsilon^3|]}{n}}\left(1 \mp \frac{0{,}4971987}{\sqrt{n}}\right)\\
m &= 4, & & 0{,}5125017\sqrt[4]{\frac{[\varepsilon^4]}{n}}\left(1 \mp \frac{0{,}5507186}{\sqrt{n}}\right)\\
m &= 5, & & 0{,}4655532\sqrt[5]{\frac{[|\varepsilon^5|]}{n}}\left(1 \mp \frac{0{,}6355080}{\sqrt{n}}\right)\\
m &= 6, & & 0{,}4294972\sqrt[6]{\frac{[\varepsilon^6]}{n}}\left(1 \mp \frac{0{,}7557764}{\sqrt{n}}\right).
\end{aligned}$$

Aus dieser Zusammenstellung geht hervor, dass sich die Bestimmung von r aus dem Durchschnitt der Fehlerquadrate vor den andern dadurch empfiehlt, dass sie die sicherste Beurteilung der Genauigkeit verspricht. Dazu kommt noch, dass sie zusammenfällt mit derjenigen, welche aus der günstigsten Hypothese über h hervorgegangen ist (s. Art. 51). Indessen ist der Unterschied zwischen den zwei ersten Bestimmungsweisen ein so unbedeutender, dass man bei der vorausgesetzten sehr grossen Anzahl von Beobachtungen beide als nahe gleichwertig ansehen kann; dabei gewährt die erste den Vorteil einer sehr bequemen Rechnung. Die

übrigen Bestimmungsweisen kämen, selbst abgesehen von dem geringeren Grade ihrer Zuverlässigkeit, schon wegen der Beschwerlichkeit der Rechnungen, welche sie erfordern, kaum in Betracht.

Die wesentliche Voraussetzung, auf welcher diese Resultate beruhen, besteht darin, dass n eine sehr grosse Zahl sein müsse. Ist n nur klein, dann befolgt der Unterschied zwischen $[|\varepsilon^m|]$ und $nS^{(m)}$, wie die eingehenden Untersuchungen Helmert's*) gezeigt haben, nicht mehr das Gauss'sche Gesetz, und es verlieren somit alle weiteren Schlüsse ihre strenge Geltung. Indessen ist die Annäherung an jenes Gesetz, wie aus der angezogenen Arbeit hervorgeht, eine so rasche, dass man auch für mässige n die obigen Resultate wird beibehalten können, ohne eine wesentliche Abweichung von den Ergebnissen der strengen Analyse befürchten zu müssen; man erlangt dadurch den Vorteil einer bequemen und für jedes n gleich bleibenden Rechnung.

Vom theoretischen Standpunkte kann noch die Frage interessieren, ob mit zunehmendem m die Unsicherheit in der Bestimmung von r wachse, wie dies oben bis $m = 6$ der Fall ist, oder ob sie nicht vielleicht für ein höheres m geringer werde als für $m = 2$. Bis $m = 10$ ist der Ausdruck (8) von Jordan**) gerechnet worden und er zeigt bis dahin das oben beobachtete Verhalten. Nun ist der in der Klammer eingeschlossene, die Unsicherheit charakterisierende Zahlenkoeffizient zufolge (8) dargestellt durch

$$\frac{\varrho\sqrt{2}}{m}\sqrt{\frac{\beta}{\alpha^2}-1}, \tag{10}$$

darin

$$\beta = \frac{\Gamma\left(\frac{2m+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}, \qquad \alpha = \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}};$$

aber selbst für ein mässig grosses x kann näherungsweise

$$\Gamma(x+1) = \sqrt{2\pi}e^{-x}x^{x+\frac{1}{2}}$$

---

*) Zeitschr. f. Mathem. u. Phys., XXI, pag. 192 flg.

**) Astron. Nachr., Bd. 74, Nr. 1766.

gesetzt werden: [illegible]
gibt sich für (10) [illegible]

[illegible]

aus welcher deutlich [illegible]
koeffizient mit n [illegible]

56. Die eben [illegible]
eine apriorische, [illegible]
dass die Beobachtungs[illegible]
nicht bekannt sind. [illegible]
punkt, dass die Fehler [illegible]
kannte Grösse ist. [illegible]
diejenige, für welche [illegible]
beobachteten Summe [illegible]
chung (1), Art. 53 [illegible]
Potenzsumme nS [illegible]

$$\psi(nS^{(m)} + z)dz = [illegible]$$

setzt man hierin nS [illegible]
Werte (3), Art. 55, [illegible]
keit der gegebenen P[illegible]

[illegible]

sie wird demnach ein M[illegible]

$$\frac{[\varepsilon^m]^2}{n(\beta - \alpha^2)} [illegible]$$

die brauchbare Lösung [illegible]

$$h^m = [illegible]$$



je grösser n, d[illegible]
stimmung [illegible]



welche sich aus der Gleichsetzung von $[|\varepsilon^m|]$ mit seinem wahrscheinlichsten Werte $nS^{(m)} = \frac{n\alpha}{h^m}$ ergibt, so dass auch aus diesem Gesichtspunkte die vorhin erörterte Bestimmung von h und r für ein grosses n die beste ist. Für kleine n besteht allerdings zwischen der besten Hypothese und derjenigen des vorigen Artikels, welche die bequemste Rechnung gibt, ein Unterschied; doch scheinen sich beide einander, wie Helmert*) gezeigt hat, so rasch zu nähern, dass man aus diesem Grunde und um komplizierte Rechnungen zu umgehen, bei der letzterwähnten Hypothese und speziell bei der Rechnung mit Fehlerquadraten als der absolut günstigsten bleiben wird.

57. Die zweckmässigste Methode behufs Bestimmung der Präzision aus einer endlichen Anzahl von Beobachtungsfehlern besteht also darin, dass man den Durchschnitt der absoluten Werte irgend einer Potenz der Fehler dem strengen Durchschnitt der betreffenden Potenz der Fehler gleich setzt. Man gelangt dadurch zu den Formeln (7), Art. 52, unter welchen diejenige, welche mit den Fehlerquadraten rechnet, die günstigste ist, einerseits weil sie dem Zusammentreffen der Fehler die grösste Wahrscheinlichkeit a priori verleiht (s. Art. 51), andererseits weil sie die kleinste Unsicherheit befürchten lässt (s. Art. 55).

Um den Fehler der Gleichung

$$\frac{[|\varepsilon^m|]}{n} = S^{(m)} \tag{1}$$

möglichst einzuschränken, also die Summe $[|\varepsilon^m|]$ dem Betrage $nS^{(m)}$ möglichst nahe zu bringen, hat Bertrand**) vorgeschlagen, $[|\varepsilon^m|]$ mit einem konstanten Faktor $\varkappa_m$ zu versehen und diesen so zu bestimmen, dass der Durchschnittswert des Ausdrucks

$$(\varkappa_m[|\varepsilon^m|] - nS^{(m)})^2$$

ein Minimum werde. Dieser Durchschnittswert ergibt sich aus der Entwicklung

*) l. c., pag. 215.

**) Calc. des Probab., art. 153—154; Compt. rend., CVI, pag. 440 flg.

$$\varkappa_m^2([\varepsilon^{2m}] + [|\varepsilon_i^m||\varepsilon_{i'}^m|]) - 2n\varkappa_m S^{(m)}[|\varepsilon^m|] + n^2 S^{(m)2} \qquad (i \lesseqgtr i')$$

nach dem Vorgange, welcher in Art. 54 beobachtet wurde, und ist

$$\varkappa_m^2(nS^{(2m)} + n(n-1)S^{(m)2}) - 2n^2\varkappa_m S^{(m)2} + n^2 S^{(m)2};$$

er erlangt sein Minimum für

$$\varkappa_m = \frac{nS^{(m)2}}{S^{(2m)} + (n-1)S^{(m)2}}. \tag{2}$$

Für $m = 1$ ergibt sich unter Anwendung der Formeln (6), Art. 52

$$\varkappa_1 = \frac{n}{n + \frac{\pi - 2}{2}} \tag{3}$$

und für $m = 2$

$$\varkappa_2 = \frac{n}{n+2}, \tag{4}$$

so dass man statt der einfachen Formeln

$$\frac{[|\varepsilon|]}{n} = \frac{1}{h\sqrt{\pi}}, \qquad \frac{[\varepsilon^2]}{n} = \frac{1}{2h^2}$$

zu setzen hätte

$$\frac{[|\varepsilon|]}{n + \frac{\pi-2}{2}} = \frac{1}{h\sqrt{\pi}} \tag{5}$$

$$\frac{[\varepsilon^2]}{n+2} = \frac{1}{2h^2}, \tag{6}$$

um den Durchschnitt des Quadrats der Differenz aus den beiden Teilen der Gleichung (1) so klein als möglich zu machen. Wie man bemerkt, rückt mit wachsendem n der Faktor $\varkappa_m$ der Einheit und damit die korrigierte Formel der ursprünglichen immer näher.

58. Statt bei gegebener Summe der Fehlerquadrate den wahrscheinlichsten Wert von h zu wählen, könnte man etwa dem wahrscheinlichen Wert, d. i. dem Durchschnitt aller möglichen Werte von h, den Vorzug geben, oder auch demjenigen Wert, welcher sich aus dem wahrscheinlichen Werte von h^2 ergibt.

Bei gegebenem $[\varepsilon\varepsilon]$ ist die Wahrscheinlichkeit eines bestimmten Wertes von h, wie in Art. 51 gezeigt worden ist, proportional

$$h^n e^{-h^2[\varepsilon\varepsilon]},$$

wenn n die Anzahl der Beobachtungen bezeichnet; es kann demnach die Wahrscheinlichkeit, dass das Präzisionsmaass einen zwischen h und $h + dh$ gelegenen Wert habe, unter der stillschweigenden Voraussetzung, dass a priori alle Werte von h gleich wahrscheinlich sind, durch

$$Ch^n e^{-h^2[\varepsilon\varepsilon]} dh$$

ausgedrückt werden; der Koeffizient C ist der Forderung

$$C\int_0^\infty h^n e^{-h^2[\varepsilon\varepsilon]} dh = 1$$

gemäss zu bestimmen, welche besagt, dass h notwendig eine positive Zahl sein müsse. Setzt man $h^2[\varepsilon\varepsilon] = t$, so folgt nach einfacher Rechnung

$$C = \frac{2[\varepsilon\varepsilon]^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}.$$

Der wahrscheinliche Wert von h aber ist ausgedrückt durch

$$C\int_0^\infty h^{n+1} e^{-h^2[\varepsilon\varepsilon]} d\varepsilon,$$

jener von h^2 durch

$$C\int_0^\infty h^{n+2} e^{-h^2[\varepsilon\varepsilon]} dh,$$

und dies führt mit der oben gebrauchten Transformation und nach Einsetzung des Wertes für C zu den Bestimmungen

$$M(h) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\sqrt{[\varepsilon\varepsilon]}},$$

$$M(h^2) = \frac{n+1}{2[\varepsilon\varepsilon]}.$$

Man kann aber für ein mässig grosses x näherungsweise

$$\Gamma(x+1) = \sqrt{2\pi}\, e^{-x} x^{x+\frac{1}{2}}$$

setzen und erhält so für $M(h)$ den Approximativwert

$$\sqrt{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n e} \sqrt{\frac{n}{2[\varepsilon\varepsilon]}},$$

welcher mit wachsendem n dem wahrscheinlichsten Wert von h, nämlich

$$\sqrt{\frac{n}{2[\varepsilon\varepsilon]}}$$

sich nähert, weil $\left(\frac{n}{n-1}\right)^n$ gegen die Grenze e^{-1} konvergiert. Dieselbe Bemerkung gilt bezüglich $M(h^2)$. Es fallen also für grosse Werte von n auch diese Bestimmungen mit der wahrscheinlichsten zusammen.

59. Gauss*) erwähnt eines Verfahrens zur Beurteilung der Genauigkeit einer Beobachtungsreihe, speziell zur Bestimmung ihres wahrscheinlichen Fehlers, das insofern ein theoretisches Interesse hat, als es sich nicht wie die früheren auf sämtliche Fehler, sondern auf einen einzelnen unter ihnen und seine Stellung zu den übrigen stützt. Gauss hat nur die bezüglichen Resultate angegeben; die von Lejeune-Dirichlet herrührende Begründung hat Encke**) mitgeteilt.

Die Wahrscheinlichkeit, dass bei $n = k + 1 + l$ Beobachtungen gleicher Genauigkeit, deren Fehler dem Exponentialgesetz folgen, k Fehler zwischen 0 und t, ein Fehler zwischen t und $t + dt$, und l Fehler über $t + dt$, durchwegs dem absoluten Werte nach und in irgend welcher Reihenfolge sich ergeben, ist dargestellt durch

$$(1) \qquad \frac{n!}{k!\,l!} u^k (1-u)^l du,$$

wenn

$$(2) \qquad u = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{ht} e^{-t^2} dt$$

ist; in der That ist der letztere Ausdruck die Wahrscheinlichkeit, dass der absolute Wert eines Fehlers zwischen 0 und t, und das auf t bezügliche Differential hiervon $du = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 t^2} dt$ die Wahrscheinlichkeit, dass er zwischen t und $t + dt$ liege, daher $1 - u - du$ die Wahrscheinlichkeit,

*) Zeitschr. für Astron. u. verw. Wissensch. I, pag. 185 flg.

**) Berliner Astron. Jahrb., 1834, pag. 294 flg.

dass er $t + dt$ übersteige; damit ist die Richtigkeit des Ausdrucks (1), bis auf Grössen von der Ordnung du, erwiesen.

Man kann nun, vor Ausführung der Beobachtungen und h als bekannt voraussetzend, die Frage nach dem wahrscheinlichsten Werte jenes Fehlers richten, welcher in der nach wachsenden Absolutwerten geordneten Reihe den $k + 1^{\text{ten}}$ Rang einnimmt; es ist dies jener Wert von t, welcher (1) zu einem Maximum macht; er hängt von h, n und dem Verhältnis $k : l$ ab.

Ist umgekehrt die Fehlerreihe gegeben und in der angedeuteten Weise geordnet, h dagegen unbekannt, so kann man nach dem wahrscheinlichsten Werte von h, d. i. nach demjenigen Werte fragen, welcher dem Eintreffen des wirklich beobachteten $(k + 1)^{\text{ten}}$ Fehlers die grösstmögliche Wahrscheinlichkeit verleiht. Da diese Wahrscheinlichkeit, vorausgesetzt, dass a priori alle Werte von h gleich wahrscheinlich sind, proportional ist dem Ausdruck (1), so gibt die Bedingung für das Maximum dieses Ausdruckes in Bezug auf h einen Zusammenhang zwischen h und dem herausgegriffenen Fehler und damit eine Bestimmung der ersteren Grösse.

Die Bedingung für das Maximum von (1) in Bezug auf t lässt sich leicht in die Form

$$\frac{k}{u} - \frac{l}{1 - u} + \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}}{\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2} = 0,$$

und die Bedingung für das Maximum desselben Ausdruckes in Bezug auf h in die Form

$$\frac{k}{u} - \frac{l}{1 - u} + \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial t\, \partial h}}{\frac{\partial u}{\partial t}\,\frac{\partial u}{\partial h}} = 0$$

bringen; setzt man aber n, k, l als sehr grosse Zahlen gleicher Ordnung voraus, so kann in beiden Gleichungen das dritte Glied neben den beiden ersten vernachlässigt werden, so dass sie zusammenfallen in die eine

$$\frac{k}{u} = \frac{l}{1 - u},$$

aus welcher $u = \frac{k}{k + l}$ folgt, wofür näherungsweise $\frac{k}{n}$ ge-

setzt werden kann. Es sind demnach die Lösungen der beiden oben umschriebenen Aufgaben enthalten in der Gleichung

$$(3)\qquad \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{ht} e^{-t^2}\,dt = \frac{k}{n},$$

welche unter Berufung auf das Bernoulli'sche Theorem unmittelbar hätte angeschrieben werden können.

Von besonderem Interesse ist der Fall $k = l$; der Fehler t ist dann unter den $n = 2k + 1$ Fehlern der mittelste; sein wahrscheinlichster Wert folgt bei gegebenem h aus der Gleichung

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{ht} e^{-t^2}\,dt = \frac{1}{2},$$

ist somit $t = \frac{\varrho}{h} = r$ oder der wahrscheinliche Fehler der Beobachtungsreihe. Umgekehrt ergibt sich bei gegebenem t der wahrscheinlichste Wert des Präzisionsmaasses $h = \frac{\varrho}{t}$ und hieraus der wahrscheinlichste Wert des wahrscheinlichen Fehlers $\frac{\varrho}{h} = t$.

Dies gäbe also eine sehr einfache Bestimmung des Präzisionsmaasses oder des wahrscheinlichen Fehlers. Um die Genauigkeit derselben zu prüfen, halten wir uns an den ersten für die analytische Darstellung bequemeren der beiden oben unterschiedenen Fälle*) und suchen die Wahrscheinlichkeit, dass der mittelste Fehler t zwischen den Grenzen $r - \delta$ und $r + \delta$ eingeschlossen sei, unter δ eine Grösse von der Ordnung $\frac{1}{\sqrt{n}}$ verstanden. Diese Wahrscheinlichkeit ist vermöge (1) dargestellt durch

$$(4)\qquad \frac{(2k+1)!}{k!k!}\int\limits_{u_1}^{u_2} u^k(1-u)^k du,$$

wobei u_1, u_2 die den Werten $r - \delta$ und $r + \delta$ von t entsprechenden Werte von u sind; zufolge (2) ist also

*) Den zweiten Fall, selbstverständlich mit den nämlichen Resultaten, hat Rebstein behandelt: Über die Berechnung der Präzision einer Beobachtung etc., Frauenfeld, 1873.

$$u_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\rho-\delta} e^{-t^2}dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\rho} e^{-t^2}dt - \frac{2h\delta}{\sqrt{\pi}}e^{-\rho^2} = \frac{1}{2} - \frac{2h\delta}{\sqrt{\pi}}e^{-\rho^2}$$

$$u_2 = \frac{1}{2} + \frac{2h\delta}{\sqrt{\pi}}e^{-\rho^2},$$

wenn man bei der Entwicklung der Integrale nach Potenzen von δ mit der ersten Potenz abbricht.

Setzt man zur Abkürzung

$$(5) \qquad \frac{2h\delta}{\sqrt{\pi}}e^{-\rho^2} = \alpha$$

und führt an Stelle von u die neue Variable v ein mittelst der Gleichung

$$u = \frac{1}{2} + \frac{v}{2\sqrt{k}},$$

so wird

$$1 - u = \frac{1}{2} - \frac{v}{2\sqrt{k}}$$

und es entsprechen den Grenzen $\frac{1}{2} - \alpha$, $\frac{1}{2} + \alpha$ von u die Grenzen $-2\alpha\sqrt{k}$ und $+2\alpha\sqrt{k}$ von v; in Folge dessen kommt (4) gleich

$$\frac{(2k)!}{k!k!}\,\frac{2k+1}{2^{2k}\sqrt{k}}\int_0^{2\alpha\sqrt{k}}\left(1 - \frac{v^2}{k}\right)^k dv.$$

Mit Hilfe der Stirling'schen Formel aber ergibt sich für $\frac{(2k)!}{k!k!}$ der Näherungswert $\frac{2^{2k}}{\sqrt{k\pi}}$, für $\left(1 - \frac{v^2}{k}\right)^k$ kann mit demselben Grade der Näherung e^{-v^2} gesetzt werden; und wenn man noch 2 für $\frac{2k+1}{k}$ setzt, so wird

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{2\alpha\sqrt{k}} e^{-v^2}dv$$

die Wahrscheinlichkeit, dass t zwischen den Grenzen $r - \delta$ und $r + \delta$, d. i. im Hinblick auf (5), zwischen den Grenzen

$$r \mp \frac{\alpha\sqrt{\pi}e^{\rho^2}}{2h}$$

eingeschlossen sei. Für die wahrscheinlichen Grenzen von t wird $2\alpha\sqrt{k} = \rho$, folglich $\alpha = \frac{\rho}{2\sqrt{k}}$; sie lauten daher

$$r \mp \frac{\varrho \sqrt{\pi} e^{\varrho^2}}{4h\sqrt{k}}.$$

Schreibt man $\frac{n}{2}$ für k (approximativ), so kann den Grenzen von t die Form

(6) $$r\left(1 \mp \frac{\sqrt{\pi} e^{\varrho^2}}{\sqrt{8n}}\right)$$

gegeben werden. Umgekehrt sind bei gegebenem t, bis auf Grössen der Ordnung $\frac{1}{\sqrt{n}}$,

(7) $$t\left(1 \mp \frac{\sqrt{\pi} e^{\varrho^2}}{\sqrt{8n}}\right)$$

die wahrscheinlichen Grenzen von r, und nach Ausrechnung des numerischen Koeffizienten $\frac{\sqrt{\pi} e^{\varrho^2}}{\sqrt{8}}$ lauten sie:

(7*) $$t\left(1 \mp \frac{0{,}786716}{\sqrt{n}}\right).$$

Hieraus erkennt man, dass diese Art der Bestimmung des wahrscheinlichen Fehlers den beiden gebräuchlichen aus $[|\varepsilon|]$ und $[\varepsilon\varepsilon]$ an Genauigkeit weit nachsteht, ja dass sie noch ungenauer ist als die Bestimmung aus $[\varepsilon^6]$, indem sie zwischen diese und die Bestimmung durch $[|\varepsilon^7|]$ sich stellt (s. Art. 55).

60. Als Vorbereitung für die Untersuchungen des folgenden Paragraphen lösen wir zwei Probleme, deren erstes folgendermaassen lautet:

Es ist die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, dass die Summe von n wahren Beobachtungsfehlern, welche dem Gesetze $\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon^2}$ folgen, eingeschlossen sei zwischen den Grenzen u und $u + du$.

Sind $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ die Fehler, $[\varepsilon]$ ihre Summe, so ist die Wahrscheinlichkeit des Bestehens der Relation

(1) $$u \leqq [\varepsilon] \leqq u + du,$$

welche Wahrscheinlichkeit mit $\psi_n(u)du$ bezeichnet werden möge, dargestellt durch das $n$fache Integral

$$\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n \int\int\cdots\int e^{-h^2[\varepsilon\varepsilon]} d\varepsilon_1\, d\varepsilon_2 \cdots d\varepsilon_n,$$

ausgedehnt über das durch die Relation (1) bezeichnete Gebiet. Um die Grenzen der einzelnen Integrationen unabhängig zu machen von dem Integrationsgebiet (1), führen wir den Diskontinuitätsfaktor

$$\frac{du}{\pi}\int_0^\infty \cos\,([\varepsilon] - u)\Theta d\Theta$$

ein, welcher die Eigenschaft besitzt, für alle Werte von $[\varepsilon]$, welche der Relation (1) nicht genügen, zu verschwinden, dagegen für alle Werte, welche mit dieser Relation im Einklange stehen, der Einheit gleich zu sein (s. Anmerkg. zu Art. 33). Dadurch ergibt sich, weil nun alle Integrationen über das ganze Fehlergebiet ausgedehnt werden dürfen, für $\psi_n(u)du$ die Bestimmung

$$(2) \qquad \psi_n(u)du$$
$$= \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n \frac{du}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-h^2[\varepsilon\varepsilon]}\cos\,([\varepsilon]-u)\,\Theta d\varepsilon_1 d\varepsilon_2\cdots d\varepsilon_n d\Theta$$

und es ist somit*)

$$(3)\ \psi_n(u) = \Re\left(\frac{1}{\pi}\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-h^2[\varepsilon\varepsilon]+([\varepsilon]-u)\Theta\sqrt{-1}} d\varepsilon_1 d\varepsilon_2\cdots d\varepsilon_n d\Theta\right).$$

Die in Bezug auf die einzelnen ε vorgeschriebenen Integrationen lassen sich unmittelbar ausführen, und es ist ohne Rücksicht auf den Zeiger**)

---

*) Wie üblich, bezeichnet das einem Ausdruck vorgesetzte $\Re$, dass der reelle Bestandteil dieses Ausdruckes zu nehmen ist.

**) Wegen $h^2\varepsilon^2 - \Theta\varepsilon\sqrt{-1} = \left(h\varepsilon - \frac{\Theta\sqrt{-1}}{2h}\right)^2 + \frac{\Theta^2}{4h^2}$ ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon\, e^{-h^2\varepsilon^2+\Theta\varepsilon\sqrt{-1}} = e^{-\frac{\Theta^2}{4h^2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(h\varepsilon - \frac{\Theta\sqrt{-1}}{2h}\right)^2} d\varepsilon;$$

mit der Substitution $h\varepsilon - \frac{\Theta\sqrt{-1}}{2h} = t$ wird aber das Integral rechter Hand gleich

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2\varepsilon^2+\Theta\varepsilon\sqrt{-1}}\,d\varepsilon = \frac{\sqrt{\pi}}{h}\,e^{-\frac{\Theta^2}{4h^2}},$$

folglich geht Gleichung (3) über in

$$\psi_n(u) = \Re\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-\frac{n\Theta^2}{4h^2}-u\Theta\sqrt{-1}}\,d\Theta\right) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-\frac{n\Theta^2}{4h^2}}\cos u\Theta\,d\Theta;$$

führt man das Integral nach der in Anmerkung zu Art. 38 entwickelten Formel aus, so wird schliesslich

$$(4)\qquad \psi_n(u) = \frac{h}{\sqrt{n\pi}}\,e^{-\frac{h^2u^2}{n}}.$$

Der wahrscheinlichste Wert von $[\varepsilon]$ ist demnach für jedes n gleich Null.

61. Das zweite Problem geht dahin, die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, dass die Quadratsumme von n Beobachtungsfehlern, welche dem Gesetze $\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2\varepsilon^2}$ unterworfen sind, zwischen den Grenzen u und $u+du$ eingeschlossen sei*).

Wir beginnen mit den einfachsten Fällen und bedienen uns einer der früheren konformen Bezeichnung.

Die Wahrscheinlichkeit, dass das Quadrat eines Fehlers zwischen den Grenzen 0 und u liege, ist ausgedrückt durch

$$\frac{2h}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{u}} e^{-h^2\varepsilon^2}\,d\varepsilon;$$

das in Bezug auf u gebildete Differential dieses Ausdrucks

$$\frac{1}{h}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{h},$$

so dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2\varepsilon^2+\Theta\varepsilon\sqrt{-1}}\,d\varepsilon = \frac{\sqrt{\pi}}{h}\,e^{-\frac{\Theta^2}{4h^2}}.$$

*) Vgl. Helmert, Zeitschr. f. Math. u. Phys., XXI, pag. 202.

gibt die Wahrscheinlichkeit, dass $u \leqq \varepsilon^2 \leqq u + du$, sie ist demnach gleich

$$(1) \qquad \psi_1(u)du = \frac{h}{\sqrt{\pi}} u^{-\frac{1}{2}} e^{-h^2 u} du.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der Quadrate zweier Fehler ε_1, ε_2 zwischen den Grenzen 0 und u liege, ist dargestellt durch das Doppelintegral

$$\frac{h^2}{\pi} \int\int e^{-h^2(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)} d\varepsilon_1 d\varepsilon_2,$$

ausgedehnt über das Gebiet $0 \leqq \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 \leqq u$; fasst man ε_1, ε_2 als rechtwinklige Koordinaten eines Punktes auf, so ist das Integrationsgebiet eine Kreisfläche vom Halbmesser $\sqrt{u}$, und die Einführung von Polarkoordinaten verwandelt diesen Ausdruck in

$$\frac{4h^2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\sqrt{u}} e^{-h^2 r^2} r dr = 1 - e^{-h^2 u};$$

das Differential hiervon ist die Wahrscheinlichkeit für $u \leqq \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 \leqq u + du$ und lautet

$$(2) \qquad \psi_2(u)du = h^2 e^{-h^2 u} du.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Quadratsumme dreier Beobachtungsfehler ε_1, ε_2, ε_3 in dem Intervall 0 bis u liege, ist durch das Raumintegral

$$\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^3 \int\int\int e^{-h^2(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2)} d\varepsilon_1 \, d\varepsilon_2 \, d\varepsilon_3$$

mit dem Integrationsgebiet $0 \leqq \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 \leqq u$ bestimmt; dieses Gebiet ist aber, wenn man ε_1, ε_2, ε_3 als orthogonale Raumkoordinaten eines Punktes auffasst, durch den Raum einer Kugel vom Halbmesser $\sqrt{u}$ dargestellt, und die Einführung räumlicher Polarkoordinaten r, φ, ϑ gibt

$$8\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \vartheta d\vartheta \int_0^{\sqrt{u}} e^{-h^2 r^2} r^2 dr$$

$$= \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \left(- u^{\frac{1}{2}} e^{-h^2 u} + \int_0^{\sqrt{u}} e^{-h^2 r^2} dr \right);$$

das Differential hiervon gibt die Wahrscheinlichkeit, dass $u \leqq \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 \leqq u + du$, nämlich

$$(3) \qquad \psi_3(u)du = \frac{2h^3}{\sqrt{\pi}} u^{\frac{1}{2}} e^{-h^2u} du.$$

Um nun auf vier Fehler $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ überzugehen, setze man $\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 = x$, $\varepsilon_3^2 + \varepsilon_4^2 = y$ und hat dann als Wahrscheinlichkeit, dass $\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \varepsilon_4^2 = x + y$ zwischen 0 und u enthalten sei, vermöge (2) den Ausdruck

$$h^4 \int\int e^{-h^2(x+y)} dx\, dy,$$

das Doppelintegral auf das Gebiet $0 \leqq x + y \leqq u$ erstreckt; dies gibt aber

$$h^4 \int_0^u e^{-h^2x} dx \int_0^{u-x} e^{-h^2y} dy = 1 - e^{-h^2u} - h^2ue^{-h^2u},$$

und nimmt man das Differential in Bezug auf u, so folgt

$$(4) \qquad \psi_4(u)du = h^4ue^{-h^2u}du$$

als Wahrscheinlichkeit dafür, dass

$$u \leqq \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \varepsilon_4^2 \leqq u + du.$$

Die Ausdrücke (1) bis (4) können in der allgemeinen Formel

$$(5) \qquad \psi_n(u)du = \frac{h^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} u^{\frac{n}{2}-1} e^{-h^2u} du$$

zusammengefasst werden. Um ihre Allgemeingiltigkeit zu erweisen, nehmen wir sie für n als bestehend an und zeigen, dass sie dann notwendig auch für $n + 2$ gelte. Wir setzen zu diesem Ende $\varepsilon_1^2 + \cdots + \varepsilon_n^2 = x$, $\varepsilon_{n+1}^2 + \varepsilon_{n+2}^2 = y$ und haben für die Relation $0 \leqq \varepsilon_1^2 + \cdots + \varepsilon_{n+2}^2 \leqq u$ die Wahrscheinlichkeit (vermöge (5) und (2))

$$\frac{h^{n+2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^u x^{\frac{n}{2}-1} e^{-h^2x} dx \int_0^{u-x} e^{-h^2y} dy$$

$$= \frac{h^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\int_0^u x^{\frac{n}{2}-1} e^{-h^2x} dx - \frac{2u^{\frac{n}{2}}}{n} e^{-h^2u} \right);$$

daraus ergibt sich durch Differentiation in Bezug auf u und mit Hilfe der Bemerkung, dass $\frac{n}{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)$,

$$\psi_{n+2}(u)du=\frac{h^{n+2}}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}u^{\frac{n}{2}}e^{-h^2u}du$$

in Übereinstimmung mit (5). Da nun letztere Formel für $n=1, 2, 3, 4$ erwiesen ist, so gilt sie allgemein*).

---

*) Nach der im vorigen Artikel befolgten Methode wäre unmittelbar

$$\psi_n(u)du=\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n\frac{du}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}e^{-h^2[\varepsilon\varepsilon]}\cos([\varepsilon\varepsilon]-u)\,\Theta d\varepsilon_1\,d\varepsilon_2\cdots d\varepsilon_n\,d\Theta,$$

oder

$$\psi_n(u)=\Re\left(\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}e^{-h^2[\varepsilon\varepsilon]+([\varepsilon\varepsilon]-u)\Theta\sqrt{-1}}d\varepsilon_1\,d\varepsilon_2\cdots d\varepsilon_n\,d\Theta\right);$$

die Integrationen, welche auf die ε sich beziehen, können getrennt werden und jede derselben gibt, mit Unterdrückung des Zeigers,

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(h^2-\Theta\sqrt{-1})\varepsilon^2}d\varepsilon=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{h^2-\Theta\sqrt{-1}}},$$

wodurch sich der eingeklammerte Ausdruck verwandelt in

$$\frac{h^n}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{e^{-u\Theta\sqrt{-1}}}{\sqrt{(h^2-\Theta\sqrt{-1})^n}}\,d\Theta$$

$$=\frac{h^n}{\pi}u^{\frac{n}{2}-1}e^{-h^2u}\int_0^{\infty}\frac{e^{h^2u-u\Theta\sqrt{-1}}}{\sqrt{(h^2u-u\Theta\sqrt{-1})^n}}\,d(h^2u-u\Theta\sqrt{-1});$$

die Vergleichung dieses Resultates mit (5) zeigt, dass

$$\Re\left(\int_0^{\infty}\frac{e^{h^2u-u\Theta\sqrt{-1}}}{\sqrt{(h^2u-u\Theta\sqrt{-1})^n}}\,d(h^2u-u\Theta\sqrt{-1})\right)=\frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

§ 8. Beurteilung der Genauigkeit einer Beobachtungsreihe auf Grund der scheinbaren Fehler.

62. Die Untersuchungen des vorigen Paragraphen haben insofern ein vorherrschend theoretisches Interesse, als die Voraussetzung der Kenntnis der wahren Fehler selten zutrifft.

Der praktisch am häufigsten vorkommende Fall ist der, dass statt der wahren Fehler die Abweichungen der einzelnen Beobachtungen von dem für die Unbekannte aus den letzteren abgeleiteten Werte, also von dem arithmetischen Mittel gegeben sind. Wir wollen diese Abweichungen im Gegensatze zu den wahren die scheinbaren Fehler nennen*).

Wir werden von jetzt ab, wie es üblich ist, zur Schätzung der Genauigkeit statt des Präzisionsmaasses h des mittleren Fehlers μ oder des durchschnittlichen Fehlers ϑ uns bedienen, aus welchen der wahrscheinliche Fehler mit Hilfe der Formeln

$$r = 0{,}6744897\ \mu = 0{,}8453473\ \vartheta$$

berechnet werden kann, die sich durch Verbindung der Gleichungen (6), Art. 52 mit Gleichung (3), Art. 46 ergeben.

Der wahre Wert der beobachteten Grösse sei X, die Beobachtungsergebnisse seien $l_1, l_2, \ldots l_n$, ihr arithmetisches Mittel $x = \frac{[l]}{n}$, so dass

$$\varepsilon_i = -l_i + X \tag{1}$$

den wahren,

$$\lambda_i = -l_i + x \tag{2}$$

den scheinbaren Fehler der Beobachtung l_i bezeichnet; zwischen den letzteren besteht die Beziehung

$$[\lambda] = 0. \tag{3}$$

63. Aus n wahren Fehlern $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ ergibt sich die wahrscheinlichste Bestimmung des mittleren Fehlers

$$\mu = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}}.$$

---

*) Bei den französischen Geometern „erreurs présumées“ oder „erreurs apparentes“, bei den englischen „residuals“, bei den italienischen „scostamenti“.

Sind statt dessen blos die scheinbaren Fehler $\lambda_1, \lambda_1, \dots \lambda_n$ gegeben, so könnte in der Voraussetzung, dass sie nur sehr wenig von den wahren sich unterscheiden, $[\varepsilon\varepsilon]$ durch $[\lambda\lambda]$ ersetzt werden; wie sich gleich zeigen wird, gäbe dies einen zu kleinen mittleren Fehler und daher eine Überschätzung der Genauigkeit. Denn es ist allgemein

$$\varepsilon_i - \lambda_i = X - x,$$

folglich

$$[\varepsilon] - [\lambda] = n(X - x)$$

und wegen $[\lambda] = 0$

$$X - x = \frac{[\varepsilon]}{n}, \tag{2}$$

daher

$$\lambda_i = \varepsilon_i - \frac{[\varepsilon]}{n} \tag{3}$$

und

$$[\lambda\lambda] = [\varepsilon\varepsilon] - \frac{[\varepsilon]^2}{n}. \tag{4}$$

In der That ist also $[\lambda\lambda] < [\varepsilon\varepsilon]$.

Um zu einer genaueren Bestimmung von μ zu gelangen, sucht man den durchschnittlichen Wert der rechten Seite von (4) und setzt $[\lambda\lambda]$ diesem Mittelwerte gleich. Nun ist

$$M([\varepsilon\varepsilon]) = n\mu^2,$$

weil der Mittelwert eines jeden ε^2 gleich μ^2 ist, und

$$M([\varepsilon]^2) = M([\varepsilon\varepsilon] + [\varepsilon_i\varepsilon_{i'}]) = n\mu^2, \qquad (i' \lessgtr i)$$

weil der Mittelwert eines jeden ε gleich Null ist. Dies gibt

$$[\lambda\lambda] = (n - 1)\mu^2,$$

woraus

$$\mu = \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n-1}}. \tag{5}$$

Die Bildung von $[\lambda\lambda]$ kann entweder direkt durch Berechnung der einzelnen λ oder indirekt mit Hilfe der Beobachtungsresultate allein erfolgen. Aus Gleichung (2), Art. 62 folgt nämlich

$$[\lambda\lambda] = [ll] - 2[l]x + nx^2$$

und wenn man für x das arithmetische Mittel einsetzt, weiter*)

$$[\lambda\lambda] = [ll] - \frac{[l]^2}{n}.$$

64. Die eben entwickelte Ableitung der Formel (5) ist nicht einwurfsfrei. Es kann bedenklich erscheinen, die Summe $[\varepsilon_i \varepsilon_{i'}]$ deshalb zu vernachlässigen, weil ihr Mittelwert Null ist**). Zu diesem Schlusse wäre man gewiss berechtigt, wenn es sich um eine Grösse handelte, welche beständig dasselbe Zeichen hat; ist der wahrscheinliche Wert einer solchen Grösse sehr klein, so ist es mit grosser Wahrscheinlichkeit die Grösse selbst auch; denn ein sehr kleiner Mittelwert kann in diesem Falle nur dadurch entstehen, dass die grösseren möglichen Werte der Grösse mit sehr kleiner Wahrscheinlichkeit begabt sind. Anders aber verhält es sich, wenn die betreffende Grösse ihr Zeichen wechseln kann, wie es bei dem Produkt $\varepsilon_i \varepsilon_{i'}$ der Fall ist; hier kann ein sehr kleiner oder auch der Mittelwert Null zu stande kommen, auch wenn grosse Beträge mit grosser Wahrscheinlichkeit zu erwarten sind, wenn nur positive und gleich grosse negative Werte gleiche Wahrscheinlichkeit haben.

In diesem Zweifel wird man durch folgende Erwägungen noch bestärkt. Gesetzt, die Anzahl der Fehler sei $2k$, so ist die wahrscheinlichste Verteilung derart, dass k Fehler positiv und k Fehler negativ sind; und dieser Verteilung entsprechen k^2 negative und $k(k-1) = k^2 - k$ positive Produkte, erstere also in der Überzahl, so dass eher ein negativer Wert von $[\varepsilon_i \varepsilon_{i'}]$ zu vermuten wäre.

Nimmt man andererseits an, dass $k \mp l$ Fehler positiv und $k \pm l$ Fehler negativ sind, so beträgt in beiden Fällen die Anzahl der negativen Produkte $k^2 - l^2$, die Anzahl der positiven Produkte hingegen

$$\frac{1}{2}(k-l)(k-l-1) + \frac{1}{2}(k+l)(k+l-1) = k^2 + l^2 - k,$$

und die erstere übersteigt die letztere, wenn

*) Auf diese Formel hat bereits Fourier 1824 die Beurteilung der Präzision des arithmetischen Mittels gegründet, jedoch $[\lambda\lambda]$ mit $[\varepsilon\varepsilon]$ als gleichwertig angesehen. Bull. des scienc. mathém., II, pag. 88 flg.

**) Bertrand, Calc. des Probab., art. 160 und 162.

$$l^2 < k - l^2,$$

oder wenn

$$l < \sqrt{\frac{k}{2}},$$

d. h. beispielsweise bei 100 Fehlern, wenn die Abweichung l weniger als 5 beträgt. Die Wahrscheinlichkeit dieser Grenzen ist, sofern k eine grosse Zahl ist, dem Bernoulli'schen Satze zufolge näherungsweise durch das Integral

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{l}{\sqrt{4kpq}}} e^{-t^2} dt$$

gegeben, darin $p = q = \frac{1}{2}$ und $l = \sqrt{\frac{k}{2}}$ gesetzt, ist daher gleich

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{\frac{1}{2}}} e^{-t^2} dt = 0{,}68 \cdots > \frac{2}{3}.$$

Mit dieser Wahrscheinlichkeit also ist ein Überwiegen der negativen Produkte über die positiven zu erwarten.

65. Diese Zweifel werden behoben durch die strenge Begründung, welche Helmert*) für die Formel gegeben hat.

Die scheinbaren Fehler $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ hängen unter einander durch die Gleichung

$$[\lambda] = 0 \tag{1}$$

und mit den zugehörigen wahren Fehlern durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \varepsilon_1 - \frac{[\varepsilon]}{n} \\ \lambda_2 &= \varepsilon_2 - \frac{[\varepsilon]}{n} \\ &\cdots\cdots \\ \lambda_n &= \varepsilon_n - \frac{[\varepsilon]}{n} \end{aligned} \tag{2}$$

zusammen; die Wahrscheinlichkeit für ihre Koexistenz ergibt sich aus der Wahrscheinlichkeit

*) Astron. Nachr., Bd. 88, Nr. 2096—97. — Vgl. auch ibid., Bd. 85, Nr. 2039.

$$\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-h^2[\varepsilon\varepsilon]} d\varepsilon_1 \, d\varepsilon_2 \cdots d\varepsilon_n \tag{3}$$

für das Zusammentreffen der wahren Fehler, indem man $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ mittels der Gleichungen (1) und (2) eliminiert und den gewonnenen Ausdruck in Bezug auf die Variable $\frac{[\varepsilon]}{n} = u$ für alle zulässigen Werte derselben, d. i. zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ integriert; denn es kann ein System $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ aus unendlich vielen verschiedenen Systemen wahrer Fehler hervorgehen. Man hat hiernach in (3) zunächst die Substitution

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \lambda_1 + u \\
\varepsilon_2 &= \lambda_2 + u \\
&\cdots\cdots \\
\varepsilon_{n-1} &= \lambda_{n-1} + u \\
\varepsilon_n &= -\lambda_1 - \lambda_2 - \cdots - \lambda_{n-1} + u
\end{aligned}$$

durchzuführen; dieselbe ergibt

$$[\varepsilon\varepsilon] = [\lambda\lambda] + nu^2$$

und an die Stelle von $d\varepsilon_1 \, d\varepsilon_2 \ldots d\varepsilon_n$ tritt

$$|J| \, d\lambda_1 \, d\lambda_2 \ldots d\lambda_{n-1} \, du,$$

wenn J die Determinante obiger Substitution bezeichnet; es ist also

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \cdots 1 \\ 0 & 1 & 0 \cdots 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \\ -1 & -1 & -1 \cdots 1 \end{vmatrix} = n,$$

wie man sich leicht überzeugt, indem man die $n-1$ ersten Zeilen zur letzten addiert; demnach geht (3) über in

$$n \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-h^2[\lambda\lambda] - h^2 n u^2} d\lambda_1 \cdots d\lambda_{n-1} \, du$$

und die Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen der scheinbaren Fehler $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ wird gleich

$$n \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-h^2[\lambda\lambda]} d\lambda_1 \cdots d\lambda_{n-1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2 n u^2} du,$$

d. i. nach Ausführung der Integration

(4) $$\sqrt{n}\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^{n-1} e^{-h^2[\lambda\lambda]}\, d\lambda_1 \cdots d\lambda_{n-1}.$$

Wenn nun $[\lambda\lambda]$ gegeben, so ist die Wahrscheinlichkeit einer Hypothese über h dem Ausdruck

$$h^{n-1} e^{-h^2[\lambda\lambda]}$$

proportional und als wahrscheinlichste Bestimmung hat diejenige zu gelten, welche diesen Ausdruck zum Maximum macht, für die also

$$(n-1)h^{n-2} - 2h^n[\lambda\lambda] = 0;$$

dies aber gibt für $\frac{1}{2h^2} = \mu^2$ die Bestimmung

(5) $$\mu^2 = \frac{[\lambda\lambda]}{n-1}$$

in Übereinstimmung mit dem Resultate in Art. 63.

66. Eine andere Ableitung der klassischen Formel ergibt sich aus der Beantwortung der Frage: Welches Gesetz befolgen die scheinbaren Fehler λ, wenn die wahren Fehler ε dem Gesetze $\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon^2}$ unterworfen sind?*)

Die i^{te} der Gleichungen (2), Art. 65, nämlich

$$\lambda_i = \varepsilon_i - \frac{[\varepsilon]}{n}$$

kann, wenn man $[\varepsilon] - \varepsilon_i = v$ setzt, auf die Form

(1) $$\lambda_i = \frac{n-1}{n}\varepsilon_i - \frac{v}{n}$$

gebracht werden, wornach der scheinbare Fehler λ_i als Funktion des ihm zugeordneten wahren Fehlers ε_i und der Summe v aller übrigen $n-1$ wahren Fehler dargestellt ist. Da diese beiden Grössen unabhängig von einander sind, so ist, wenn

$\varphi(\varepsilon)d\varepsilon$ die Wahrscheinlichkeit eines zwischen ε und $\varepsilon + d\varepsilon$ liegenden Wertes von ε_i,

$\psi(v)dv$ die Wahrscheinlichkeit eines zwischen v und $v + dv$ liegenden Wertes von v

und

*) Vgl. d. Verf. Note in den Monatsh. für Math. u. Phys., Bd. I.

$\varpi(\lambda)d\lambda$ die Wahrscheinlichkeit des zwischen den zugehörigen Grenzen λ und $\lambda + d\lambda$ liegenden Wertes von λ_i bezeichnet,

$$(2) \qquad \varpi(\lambda)d\lambda = \int\int \varphi(\varepsilon)\psi(v)d\varepsilon dv,$$

das Integral über alle Wertverbindungen des Gebietes

$$(3) \qquad \lambda \leqq \frac{n-1}{n}\varepsilon - \frac{v}{n} \leqq \lambda + d\lambda$$

von ε und v ausgedehnt.

Führt man für $\psi(v)$ den aus Gleichung (4), Art. 60, resultierenden Wert ($n-1$ für n gesetzt) und um von dem Gebiet (3) unabhängig zu sein, den in der Anmerkung zu Art. 33 abgeleiteten Diskontinuitätsfaktor

$$\frac{d\lambda}{\pi}\int\limits_0^\infty \cos\left(\frac{n-1}{n}\varepsilon - \frac{v}{n} - \lambda\right)\Theta d\Theta$$

ein, so wird

$$\varpi(\lambda)d\lambda = \frac{h^2 d\lambda}{\pi^2\sqrt{n-1}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_0^{\infty} e^{-h^2\left(\varepsilon^2+\frac{v^2}{n-1}\right)}\cos\left(\frac{n-1}{n}\varepsilon - \frac{v}{n} - \lambda\right)\Theta d\varepsilon dv d\Theta$$

oder

$$\varpi(\lambda) = \Re\left\{\frac{h^2}{\pi^2\sqrt{n-1}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_0^{\infty} e^{-h^2\left(\varepsilon^2+\frac{v^2}{n-1}\right)+\left(\frac{n-1}{n}\varepsilon-\frac{v}{n}-\lambda\right)\Theta\sqrt{-1}} d\varepsilon dv d\Theta\right\}.$$

Die Integration in Bezug auf ε gibt (s. Anmerkg. zu Art. 60)

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2\varepsilon^2+\frac{n-1}{n}\varepsilon\Theta\sqrt{-1}} d\varepsilon = \frac{\sqrt{\pi}}{h} e^{-\frac{(n-1)^2\Theta^2}{4n^2h^2}},$$

die Integration in Bezug auf v

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{h^2}{n-1}v^2-\frac{v\Theta}{n}\sqrt{-1}} dv = \frac{\sqrt{(n-1)\pi}}{h} e^{-\frac{(n-1)\Theta^2}{4n^2h^2}};$$

demnach ist

$$\varpi(\lambda) = \Re\left\{\frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-\frac{(n-1)\Theta^2}{4nh^2} - \lambda\Theta\sqrt{-1}}\,d\Theta\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-\frac{(n-1)\Theta^2}{4nh^2}}\cos\lambda\Theta\,d\Theta,$$

also schliesslich, wenn man für das übrigbleibende Integral nach Anmerkung zu Art. 38 den Wert bildet,

$$\varpi(\lambda) = \frac{h\sqrt{\frac{n}{n-1}}}{\sqrt{\pi}}\,e^{-\frac{nh^2}{n-1}\lambda^2}. \tag{4}$$

Wenn also die wahren Fehler ε einer Reihe von n Beobachtungen das Gesetz $\frac{h}{\sqrt{\pi}}\,e^{-h^2\varepsilon^2}$ befolgen, so sind die scheinbaren Fehler λ einem Gesetz von der nämlichen Form, jedoch mit einem im Verhältnis $\sqrt{n} : \sqrt{n-1}$ grösseren Präzisionsmaass unterworfen.

Fasst man die Reihe der λ wie eine Reihe von wahren Fehlern auf, so ist a priori der mittlere Fehler dieser Reihe (d. i. die mittlere Abweichung einer Beobachtung vom arithmetischen Mittel) vermöge (4)

$$\mu_\lambda = \frac{1}{h}\sqrt{\frac{n-1}{2n}},$$

hingegen der mittlere Fehler in der Reihe der wahren Fehler ε

$$\mu = \frac{1}{h\sqrt{2}},$$

folglich

$$\mu = \mu_\lambda\sqrt{\frac{n}{n-1}}; \tag{5}$$

andererseits ist auf Grund der beobachteten λ

$$\mu_\lambda = \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n}};$$

durch Verbindung dieser Gleichung mit der vorausgehenden ergibt sich wieder

$$\mu = \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n-1}}. \tag{6}$$

67. Wir gehen nun dazu über, die Genauigkeit der Formel (6) zu schätzen, und benützen als Maassstab hierfür den Mittelwert von

$$\left(\frac{[\lambda\lambda]}{n-1}-\mu^2\right)^2,$$

welchen wir als das Quadrat des mittleren in der Bestimmung (6) für μ^2 zu befürchtenden Fehlers bezeichnen wollen.

Nun ist

$$\left(\frac{[\lambda\lambda]}{n-1}-\mu^2\right)^2=\left(\frac{[\lambda\lambda]}{n-1}\right)^2-2\frac{[\lambda\lambda]}{n-1}\mu^2+\mu^4$$

und weil $M\left(\frac{[\lambda\lambda]}{n-1}\right)=\mu^2$ ist, so wird

$$M\left(\left(\frac{[\lambda\lambda]}{n-1}-\mu^2\right)^2\right)=M\left(\left(\frac{[\lambda\lambda]}{n-1}\right)^2\right)-\mu^4. \tag{1}$$

Bei Bestimmung des ersten Gliedes der rechten Seite muss auf die wahren Fehler rekurriert werden. Es ist (s. Gleichung (4), Art. 63)

$$[\lambda\lambda]=[\varepsilon\varepsilon]-\frac{[\varepsilon]^2}{n}=\frac{(n-1)[\varepsilon\varepsilon]-[\varepsilon_i\varepsilon_{i'}]}{n}, \qquad (i \lesseqgtr i')$$

somit

$$\left(\frac{[\lambda\lambda]}{n-1}\right)^2=\frac{[\varepsilon\varepsilon]^2}{n^2}-2\frac{[\varepsilon\varepsilon][\varepsilon_i\varepsilon_{i'}]}{n^2(n-1)}+\frac{[\varepsilon_i\varepsilon_{i'}]^2}{n^2(n-1)^2};$$

weil nun $[\varepsilon\varepsilon]^2=[\varepsilon^4]+[\varepsilon_i^2\varepsilon_{i'}^2]$ und $\frac{3}{4h^4}=3\mu^4$ der mittlere Wert eines jeden ε^4 (s. Gleichungen (6), Art. 52), μ^4 der mittlere Wert eines jeden $\varepsilon_i^2\varepsilon_{i'}^2$ ist, so hat das erste Glied der rechten Seite den Mittelwert $\frac{3\mu^4}{n}+\frac{(n-1)\mu^4}{n}$; das zweite Glied verschwindet bei der Mittelwertbildung wegen des Faktors $[\varepsilon_i\varepsilon_{i'}]$; das dritte Glied endlich gibt wegen $[\varepsilon_i\varepsilon_{i'}]^2 = [\varepsilon_i^2\varepsilon_{i'}^2]+[\varepsilon_i\varepsilon_{i'}\varepsilon_{i''}\varepsilon_{i'''}]$ den Mittelwert $\frac{2\mu^4}{n(n-1)}$, so dass

$$M\left(\left(\frac{[\lambda\lambda]}{n-1}\right)^2\right)=\frac{3\mu^4}{n}+\frac{(n-1)\mu^4}{n}+\frac{2\mu^4}{n(n-1)}.$$

Durch Eintragung dieses Wertes in (1) ergibt sich also für das Quadrat des mittleren Fehlers der Gleichung $\mu^2=\frac{[\lambda\lambda]}{n-1}$ der Ausdruck

$$\left(\frac{3}{n} + \frac{n-1}{n} + \frac{2}{n(n-1)} - 1\right)\mu^4 = \frac{2\mu^4}{n-1},$$

für den mittleren Fehler selbst der Wert $\pm \mu^2 \sqrt{\frac{2}{n-1}}$, so dass man in

(2) $$\mu^2 = \frac{[\lambda\lambda]}{n-1}\left(1 \mp \sqrt{\frac{2}{n-1}}\right)$$

die mittleren Grenzen von μ^2 und, ein grosses n vorausgesetzt, in

(3) $$\mu = \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n-1}}\left(1 \mp \sqrt{\frac{1}{2(n-1)}}\right)$$

die (approximativen) mittleren Grenzen von μ hat.

68. Der eben vollzogene Übergang von der Formel (2) zur Formel (3) ist nicht mehr zulässig, wenn n eine kleine Zahl ist. Von diesem Mangel wird man frei, wenn man unmittelbar den mittleren Fehler der Formel

(1) $$\mu = \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n-1}}$$

selbst sucht*); sein Quadrat ist der Mittelwert des Ausdruckes

(2) $$\left(\sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n-1}} - \mu\right)^2 = \frac{[\lambda\lambda]}{n-1} - 2\mu\sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n-1}} + \mu^2.$$

Das erste Glied gibt bei der Mittelwertbildung

(3) $$M\left(\frac{[\lambda\lambda]}{n-1}\right) = \mu^2;$$

es bliebe also noch $M(\sqrt{[\lambda\lambda]})$ zu bestimmen, und dazu ist die Kenntnis der Wahrscheinlichkeit erforderlich, dass $u \leqq [\lambda\lambda] \leqq u + du$ sei.

In Gleichung (4), Art. 65, ist für die Wahrscheinlichkeit eines Systems $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ der Ausdruck

$$\sqrt{n}\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^{n-1} e^{-h^2[\lambda\lambda]}\, d\lambda_1\, d\lambda_2 \ldots d\lambda_{n-1}$$

gefunden worden; demnach ist die verlangte Wahrscheinlichkeit durch das $(n-1)$fache Integral

(4) $$\sqrt{n}\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^{n-1} \int\int\cdots\int e^{-h^2[\lambda\lambda]}\, d\lambda_1\, d\lambda_2 \cdots d\lambda_{n-1}$$

mit dem Integrationsgebiet $u \leqq [\lambda\lambda] \leqq u + du$ gegeben.

---

*) Helmert, ibid.

Führt man an Stelle von $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_{n-1}$ ein neues System von Variabeln $t_1, t_2, \dots t_{n-1}$ ein durch die Gleichungen

$$t_1 = \sqrt{2}\left(\lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_2 + \frac{1}{2}\lambda_3 + \cdots + \frac{1}{2}\lambda_{n-1}\right)$$

$$t_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}\left(\lambda_2 + \frac{1}{3}\lambda_3 + \cdots + \frac{1}{3}\lambda_{n-1}\right)$$

$$t_3 = \sqrt{\frac{4}{3}}\left(\lambda_3 + \cdots + \frac{1}{4}\lambda_{n-1}\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$t_{n-1} = \sqrt{\frac{n}{n-1}}\,\lambda_{n-1},$$

erhebt dieselben ins Quadrat und bildet die Summe, so erkennt man bald, dass alle Quadrate und Produkte der λ mit dem Faktor 2 erscheinen, so dass

$$[tt] = 2\{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \cdots + \lambda_{n-1}^2 + [\lambda_i\lambda_{i'}]\};$$
$$(i < i',\ i = 1, 2, \cdots n-2)$$

ferner ist wegen $[\lambda] = 0$

$$\lambda_n^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \cdots + \lambda_{n-1}^2 + 2[\lambda_i\lambda_{i'}];$$

addiert man zu der vorgehenden Gleichung die aus der letzten resultierende

$$0 = \lambda_n^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \cdots - \lambda_{n-1}^2 - 2[\lambda_i\lambda_{i'}]$$

hinzu, so ergibt sich

$$[tt] = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \cdots + \lambda_n^2 = [\lambda\lambda].$$

Die Funktionaldeterminante der t in Bezug auf die λ reduziert sich, wie man leicht erkennt, auf ihr Anfangsglied $\sqrt{2}\,.\sqrt{\frac{3}{2}}\cdots\sqrt{\frac{n}{n-1}} = \sqrt{n}$, folglich ist die Funktionaldeterminante der λ in Bezug auf die t gleich $\frac{1}{\sqrt{n}}$, und es geht somit der Ausdruck (4) über in

$$\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^{n-1}\int\!\!\int\cdots\int e^{-h^2[tt]}\,dt_1\,dt_2\cdots dt_{n-1}$$

mit dem Integrationsgebiet $u \leqq [tt] \leqq u + du$.

Hiernach ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Quadratsumme von n scheinbaren Fehlern λ zwischen den Grenzen u und $u + du$ liege, dieselbe wie die Wahrscheinlichkeit, dass $n - 1$ wahre Fehler ε eine zwischen den nämlichen Grenzen

eingeschlossene Quadratsumme ergeben, somit nach Gleichung (5), Art. 61, gleich

$$\frac{h^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} u^{\frac{n-3}{2}} e^{-h^2 u} du;$$

hieraus ergibt sich der Durchschnittswert der Grösse $\sqrt{[\lambda\lambda]} = u^{\frac{1}{2}}$, welche aller Werte zwischen 0 und ∞ fähig ist,

$$(5) \quad M(\sqrt{[\lambda\lambda]}) = \frac{h^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_0^\infty u^{\frac{n}{2}-1} e^{-h^2 u} du = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{h\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}$$

mit Hilfe der Substitution $h^2 u = v$.

Führt man die Werte (3) und (5) in (2) ein, so erhält man als Quadrat des mittleren Fehlers der Formel (1) den Ausdruck

$$2\mu^2 - \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \frac{2\mu}{h\sqrt{n-1}} = 2\mu^2 \left(1 - \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \sqrt{\frac{2}{n-1}}\right)$$

und der mittlere Fehler selbst kommt gleich

$$\mp \mu \sqrt{2 - \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \sqrt{\frac{8}{n-1}}};$$

hiernach hat man

$$(6) \quad \mu = \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n-1}} \left(1 \mp \sqrt{2 - \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \sqrt{\frac{8}{n-1}}}\right),$$

wobei der mit dem Zeichen $\mp$ versehene Teil des eingeklammerten Ausdruckes den mittleren Fehler von μ in Einheiten von $\sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n-1}}$ angibt.

Für ein grosses n gibt diese Formel die früher gefundene Gleichung (3), Art. 67, als Näherung wieder; man hat dann nämlich mit Benützung der Stirling'schen Formel näherungsweise

$$\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} = e^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{n-2}{2}} \left(\frac{n-2}{n-3}\right)^{\frac{n-2}{2}}.$$

Für den letzten Faktor folgt aus seiner logarithmischen Entwicklung

$$-\frac{n-2}{2} \cdot l\left(1 - \frac{1}{n-2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4(n-2)} + \cdots$$

der Näherungswert

$$e^{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{1}{4(n-2)}\right),$$

wodurch weiter

$$\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} = \left(1 + \frac{1}{4(n-2)}\right)\sqrt{\frac{n-2}{2}};$$

die Einführung dieses Wertes in die Gleichung (6) gibt nach einfacher Rechnung, wenn man sich bei Entwicklung der Grösse unter dem ersten Wurzelzeichen auf Grössen von der Ordnung $\frac{1}{n-1}$ beschränkt, die eben erwähnte einfachere Bestimmung

$$\mu = \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n-1}}\left(1 \mp \sqrt{\frac{1}{2(n-1)}}\right), \tag{7}$$

die selbst bei mässig grossem m die obige kompliziertere vollkommen ersetzt, so dass diese nur für kleine n Bedeutung hat. Man findet für das mit $\mp$ bezeichnete Glied

	nach Formel (6)	nach Formel (7)
bei $n = 5$	0,3465	0,3536
10	0,2338	0,2357
20	0,1617	0,1622
30	0,1310	0,1313
40	0,1130	0,1132.

69. Die zur Bestimmung des durchschnittlichen Fehlers ϑ aus den scheinbaren Fehlern λ dienliche Formel ist zuerst von **Peters***) aufgestellt worden. Wir geben seine Deduktion

*) Astron. Nachr., Bd. 44, Nr. 1034.

in abgeänderter Form und mit Hervorhebung der dabei gemachten Voraussetzung wieder.

Würden die scheinbaren Fehler $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ ebenso wie die wahren Fehler $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ dem Gauss'schen Gesetze folgen, so bestünde zwischen dem mittleren und dem durchschnittlichen Fehler ihrer Reihe, μ' und ϑ', dieselbe Beziehung, welche zwischen den auf die Reihe der wahren Fehler bezüglichen Grössen μ und ϑ, um deren Bestimmung es sich handelt, stattfindet, d. h. es wäre (s. Gleichungen (6), Art. 52)

$$(1) \qquad \mu' = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\vartheta'$$

ebenso wie

$$(2) \qquad \mu = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\vartheta,$$

und die Bestimmung von μ', ϑ' hätte den Gleichungen

$$(3) \qquad \mu' = \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n}}$$

$$(4) \qquad \vartheta' = \frac{[|\lambda|]}{n}$$

gemäss zu erfolgen.

Ersetzt man in (3) die Summe $[\lambda\lambda]$ durch ihren Mittelwert $(n-1)\mu^2$, so ergibt sich das Verhältnis $\frac{\mu'}{\mu}$ und zwar

$$\frac{\mu'}{\mu} = \sqrt{\frac{n-1}{n}};$$

und da vermöge (1) und (2) $\frac{\vartheta'}{\vartheta} = \frac{\mu'}{\mu}$, so ist auch

$$\frac{\vartheta'}{\vartheta} = \sqrt{\frac{n-1}{n}};$$

führt man schliesslich für ϑ' den in (4) angegebenen Wert ein, so kommt man zu dem Resultate

$$(5) \qquad \vartheta = \frac{[|\lambda|]}{\sqrt{n(n-1)}}.$$

70. Peters hat die an die Spitze gestellte Voraussetzung, dass die scheinbaren Fehler zugleich mit den wahren das Exponentialgesetz befolgen, weder explicit ausgesprochen,

noch ihre Richtigkeit erwiesen. Darum konnte die Begründung seiner Formel nicht befriedigen und veranlässte Helmert zu der im folgenden Artikel erörterten Neubegründung.

Durch die in Art. 66 durchgeführte Untersuchung ist indessen die Stichhaltigkeit jener Voraussetzung dargethan; übrigens lässt sich auf dem Resultate dieser Untersuchung eine sehr einfache Ableitung der Formel (5) aufbauen. Da nämlich die scheinbaren Fehler dem Gesetze

$$\frac{h\sqrt{\frac{n}{n-1}}}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{nh^2}{n-1}\lambda^2}$$

folgen, so ist bei bekanntem h der durchschnittliche Fehler ihrer Reihe (die durchschnittliche Abweichung einer Beobachtung vom arithmetischen Mittel)

$$\vartheta' = \frac{1}{h}\sqrt{\frac{n-1}{n\pi}};$$

hingegen ist der durchschnittliche Fehler der Reihe ε

$$\vartheta = \frac{1}{h\sqrt{\pi}},$$

daher

$$\vartheta = \vartheta'\sqrt{\frac{n}{n-1}}; \tag{1}$$

andererseits ist auf Grund der beobachteten λ

$$\vartheta' = \frac{[|\lambda|]}{n};$$

verbindet man diese Gleichung mit der vorangehenden, so ergibt sich wie vorhin

$$\vartheta = \frac{[|\lambda|]}{\sqrt{n(n-1)}}. \tag{2}$$

71. Helmert's*) oben erwähnte Begründung der Formel stützt sich auf die Bestimmung des Mittelwertes von $[|\lambda|]$. Dieser Mittelwert ist aber das $n$fache des Mittelwertes eines einzelnen λ. Nun ist beispielsweise

---

*) Astron. Nachr., Bd. 85, Nr. 2039.

$$(1) \qquad \lambda_1 = \varepsilon_1 - \frac{[\varepsilon]}{n} = \frac{(n-1)\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \cdots - \varepsilon_n}{n}$$

und der absolute Wert davon kann durch

$$\left(\varepsilon_1 - \frac{[\varepsilon]}{n}\right)\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\sin\left(\varepsilon_1 - \frac{[\varepsilon]}{n}\right)\Theta d\Theta}{\Theta}$$

dargestellt werden, weil der Diskontinuitätsfaktor

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\sin\left(\varepsilon_1 - \frac{[\varepsilon]}{n}\right)\Theta d\Theta}{\Theta}$$

entweder die positive oder die negative Einheit bedeutet, jenachdem $\varepsilon_1 - \frac{[\varepsilon]}{n}$ positiv oder negativ ist. Hiernach hat man

$$(2) \qquad M([|\lambda|]) = n\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n \frac{2}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots$$

$$\cdots\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_0^{\infty}\left(\varepsilon_1 - \frac{[\varepsilon]}{n}\right)e^{-h^2[\varepsilon\varepsilon]}\frac{\sin\left(\varepsilon_1 - \frac{[\varepsilon]}{n}\right)\Theta}{\Theta}\, d\varepsilon_1\, d\varepsilon_2 \cdots d\varepsilon_n\, d\Theta.$$

Bezeichnet U den Wert des $(n+1)$fachen Integrals mit Weglassung des davorstehenden Faktors, so ist

$$(3) \qquad U = -\sqrt{-1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots$$

$$\cdots\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_0^{\infty}\left(\varepsilon_1 - \frac{[\varepsilon]}{n}\right)e^{-h^2[\varepsilon\varepsilon] + \left(\varepsilon_1 - \frac{[\varepsilon]}{n}\right)\Theta\sqrt{-1}}\, d\varepsilon_1\, d\varepsilon_2 \cdots d\varepsilon_n \frac{d\Theta}{\Theta}.$$

Ersetzt man hier $\varepsilon_1 - \frac{[\varepsilon]}{n}$ durch die in (1) angegebene entwickelte Form und zerlegt die Exponentialgrösse in Faktoren, welche nur von je einem ε abhängen, so können die auf die ε bezüglichen Integrationen wie folgt ausgeführt werden. Die Integration in Bezug auf ε_1 gibt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(n-1)\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \cdots - \varepsilon_n}{n} e^{-h^2\varepsilon_1^2 + \frac{n-1}{n}\varepsilon_1 \Theta \sqrt{-1}} d\varepsilon_1$$

$$= \frac{n-1}{n} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_1 e^{-h^2\varepsilon_1^2 + \frac{n-1}{n}\varepsilon_1 \Theta \sqrt{-1}} d\varepsilon_1$$

$$- \frac{\varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n}{n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2\varepsilon_1^2 + \frac{n-1}{n}\varepsilon_1 \Theta \sqrt{-1}} d\varepsilon_1$$

$$= \frac{n-1}{n} P - \frac{\varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n}{n} R;$$

fügt man hierzu den von ε_2 abhängigen Faktor $e^{-h^2\varepsilon_2^2 - \frac{\varepsilon_2}{n}\Theta\sqrt{-1}} d\varepsilon_2$, so gibt die Integration nach ε_2

$$\frac{n-1}{n} P \int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2\varepsilon_2^2 - \frac{\varepsilon_2}{n}\Theta\sqrt{-1}} d\varepsilon_2 - R\left\{\frac{1}{n}\int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_2 e^{-h^2\varepsilon_2^2 - \frac{\varepsilon_2}{n}\Theta\sqrt{-1}} d\varepsilon_2\right.$$

$$\left. + \frac{\varepsilon_3 + \cdots + \varepsilon_n}{n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2\varepsilon_2^2 - \frac{\varepsilon_2}{n}\Theta\sqrt{-1}} d\varepsilon_2\right\}$$

$$= \frac{n-1}{n} PQ - R\left\{\frac{1}{n} S + \frac{\varepsilon_3 + \cdots + \varepsilon_n}{n} Q\right\};$$

multipliziert man diesen Ausdruck mit dem von ε_3 abhängigen Faktor $e^{-h^2\varepsilon_3^2 - \frac{\varepsilon_3}{n}\Theta\sqrt{-1}} d\varepsilon_3$, so treten bei der darauf folgenden Integration nach ε_3 keine neuen Integralformen mehr auf und man erhält

$$\frac{n-1}{n} PQ^2 - R\left\{\frac{2}{n} QS + \frac{\varepsilon_4 + \cdots + \varepsilon_n}{n} Q^2\right\};$$

so fortfahrend kommt man nach Vollziehung der Integrationen in Bezug auf $\varepsilon_4, \ldots \varepsilon_{n-1}$ zu dem Ausdruck

$$\frac{n-1}{n} PQ^{n-2} - R\left\{\frac{n-2}{n} Q^{n-3} S + \frac{\varepsilon_n}{n} Q^{n-2}\right\}$$

und die letzte auf ε_n bezügliche Integration führt zu

$$\frac{n-1}{n} P Q^{n-1} - R\left\{\frac{n-2}{n} Q^{n-2} S + \frac{1}{n} Q^{n-2} S\right\}$$

$$= \frac{n-1}{n}(PQ - RS)\, Q^{n-2}.$$

so dass

$$(4) \qquad U = -\sqrt{-1}\,\frac{n-1}{n}\int_0^{\pi} (PQ - RS)\, Q^{n-2}\,\frac{d\Theta}{\Theta}.$$

Die vier vom Zeiger unabhängigen Integrale P, Q, R, S haben nun folgende Werte*):

$$P = \int_{-\pi}^{\pi} \varepsilon e^{-h^2\varepsilon^2 - \frac{n-1}{n}\varepsilon\Theta\sqrt{-1}}\, d\varepsilon = \sqrt{-1}\,\frac{(n-1)\sqrt{\pi}\cdot\Theta}{2nh^3}\, e^{-\frac{(n-1)^2\Theta^2}{4n^2h^2}}$$

$$Q = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-h^2\varepsilon^2 - \frac{\varepsilon}{n}\Theta\sqrt{-1}}\, d\varepsilon = \frac{\sqrt{\pi}}{h}\, e^{-\frac{\Theta^2}{4n^2h^2}}$$

$$R = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-h^2\varepsilon^2 + \frac{n-1}{n}\varepsilon\Theta\sqrt{-1}}\, d\varepsilon = \frac{\sqrt{\pi}}{h}\, e^{-\frac{(n-1)^2\Theta^2}{4n^2h^2}}$$

$$S = \int_{-\pi}^{\pi} \varepsilon e^{-h^2\varepsilon^2 - \frac{\varepsilon}{n}\Theta\sqrt{-1}}\, d\varepsilon = -\sqrt{-1}\,\frac{\sqrt{\pi}\cdot\Theta}{2nh^3}\, e^{-\frac{\Theta^2}{4n^2h^2}},$$

ihre Einführung in die Gleichung (4) gibt

---

*) Die Integrale Q, R folgen aus der in der Anmerkung zu Art. 60 abgeleiteten Formel

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2\varepsilon^2 + r\varepsilon\sqrt{-1}}\, d\varepsilon = \frac{\sqrt{\pi}}{h}\, e^{-\frac{r^2}{4h^2}};$$

aus dieser aber ergibt sich durch Differentiation in Bezug auf r die zur Bestimmung von P und S taugliche Formel

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon e^{-h^2\varepsilon^2 + r\varepsilon\sqrt{-1}}\, d\varepsilon = \sqrt{-1}\,\frac{r\sqrt{\pi}}{2h^3}\, e^{-\frac{r^2}{4h^2}}.$$

$$U = \frac{n-1}{n} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{h}\right)^{n-2} \frac{\pi}{2h^4} \int_0^{\infty} e^{-\frac{(n-1)\Theta^2}{4nh^2}} d\Theta$$

$$= \left(\frac{\sqrt{\pi}}{h}\right)^n \frac{\sqrt{\pi}}{2h} \sqrt{\frac{n-1}{n}}.$$

Dieser Wert in die Gleichung (2) an die Stelle des Integrals gesetzt, führt zu dem Resultate

$$M([|\lambda|]) = \frac{\sqrt{n(n-1)}}{h\sqrt{\pi}}.$$

Setzt man den beobachteten Wert $[|\lambda|]$ diesem Mittelwert gleich und beachtet, dass $\frac{1}{h\sqrt{\pi}} = \vartheta$ (s. die Gleichungen (6), Art. 52), so ergibt sich wieder

$$(5) \qquad \vartheta = \frac{[|\lambda|]}{\sqrt{n(n-1)}}.$$

72. Um den mittleren Fehler dieser Bestimmung von ϑ zu finden*), hat man den Durchschnittswert von

$$(1) \qquad \left(\frac{[|\lambda|]}{\sqrt{n(n-1)}} - \vartheta\right)^2 = \frac{[|\lambda|]^2}{n(n-1)} - 2\vartheta \frac{[|\lambda|]}{\sqrt{n(n-1)}} + \vartheta^2$$

zu bilden. Nun ist

$$(2) \qquad M\left(\frac{[|\lambda|]}{\sqrt{n(n-1)}}\right) = \vartheta$$

und wegen $[|\lambda|]^2 = [\lambda\lambda] + [|\lambda_i\lambda_k|]$ (wo $i \lessgtr k$)

$$M\left(\frac{[|\lambda|]^2}{n(n-1)}\right) = \frac{1}{n} M\left(\frac{[\lambda\lambda]}{n-1}\right) + \frac{1}{n(n-1)} M([|\lambda_i\lambda_k|])$$

$$(3) \qquad = \frac{\mu^2}{n} + \frac{1}{n(n-1)} M([|\lambda_i\lambda_k|]);$$

es bleibt also der Mittelwert von $[|\lambda_i\lambda_k|]$ oder, da jedes der $n(n-1)$ Glieder dieser Summe den nämlichen Mittelwert hat, der Mittelwert eines dieser Glieder, z. B. von $|\lambda_1\lambda_2|$ zu bestimmen.

Mit Benützung eines Diskontinuitätsfaktors ist

$$(4) \qquad |\lambda_1\lambda_2| = \lambda_1\lambda_2 \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin(\lambda_1\lambda_2)\Theta}{\Theta} d\Theta,$$

---

*) Helmert, Astron. Nachr., Bd. 88, Nr. 2096—97.

ferner hat man

$$(5)\qquad \begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{n-1}{n}\varepsilon_1 - \frac{\varepsilon_2}{n} - \frac{u}{n} \\ \lambda_2 &= -\frac{\varepsilon_1}{n} + \frac{n-1}{n}\varepsilon_2 - \frac{u}{n}, \end{aligned}$$

wenn u die Summe der $n-2$ übrigen wahren Fehler $\varepsilon_3, \ldots \varepsilon_n$ bezeichnet; hierdurch erscheinen λ_1, λ_2 als Funktionen der drei unabhängigen Grössen ε_1, ε_2, u dargestellt, für deren Eintreffen einzeln die Wahrscheinlichkeit (s. Gleichung (4), Art. 60)

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon_1^2} d\varepsilon_1, \qquad \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon_2^2} d\varepsilon_2, \qquad \frac{h}{\sqrt{(n-2)\pi}} e^{-\frac{h^2u^2}{n-2}} du$$

besteht, deren Zusammentreffen und hiermit auch das Eintreffen der Werte λ_1, λ_2 mit der Wahrscheinlichkeit

$$\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^3 \frac{1}{\sqrt{n-2}} e^{-h^2\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\frac{u^2}{n-2}\right)} d\varepsilon_1\, d\varepsilon_2\, du$$

zu erwarten ist. Da nun ε_1, ε_2, u aller Werte zwischen $-\infty$ und $+\infty$ fähig sind, so ergibt sich mit Hilfe der Darstellung des absoluten Wertes von $\lambda_1 \lambda_2$

$$(6)\quad M(|\lambda_1\lambda_2|) = \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^3 \frac{2}{\pi\sqrt{n-2}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} \lambda_1\lambda_2 e^{-h^2\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\frac{u^2}{n-2}\right)} \cdot \frac{\sin(\lambda_1\lambda_2)\Theta}{\Theta} d\varepsilon_1\, d\varepsilon_2\, du\, d\Theta.$$

Die Einführung von λ_1, λ_2, u an Stelle von ε_1, ε_2, u hat auf Grund von (5) mittels der Gleichungen

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \lambda_1 + \frac{\lambda_1+\lambda_2+u}{n-2} \\ \varepsilon_2 &= \lambda_2 + \frac{\lambda_1+\lambda_2+u}{n-2} \\ u &= u \end{aligned}$$

zu geschehen; die Determinante dieser Substitution ist

$$\begin{vmatrix} \frac{n-1}{n-2} & \frac{1}{n-2} & \frac{1}{n-2} \\ \frac{1}{n-2} & \frac{n-1}{n-2} & \frac{1}{n-2} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{n}{n-2};$$

ferner ist

$$\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2=\lambda_1^2+\lambda_2^2+\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^2}{n-2}+2\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2+u}{n-2}\right)^2+\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^2+2(\lambda_1+\lambda_2)u}{n-2}$$

und daraus

$$\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\frac{u^2}{n-2}=\lambda_1^2+\lambda_2^2+\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^2}{n-2}+\frac{n}{(n-2)^2}(\lambda_1+\lambda_2+u)^2.$$

Nach Ausführung der Substitution kann die auf u bezügliche Integration ausgeführt werden und gibt

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{nh^2}{(n-2)^2}(\lambda_1+\lambda_2+u)^2}\,du=\frac{(n-2)\sqrt{\pi}}{h\sqrt{n}},$$

so dass

$$(7)\quad M(|\lambda_1\lambda_2|)=2\left(\frac{h}{\pi}\right)^2\sqrt{\frac{n}{n-2}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\lambda_1\lambda_2 e^{-h^2\left(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^2}{n-2}\right)}$$

$$\cdot\frac{\sin(\lambda_1\lambda_2)\Theta}{\Theta}\,d\lambda_1\,d\lambda_2\,d\Theta.$$

Bezeichnet man den Wert des dreifachen Integrals vorübergehend mit U, so ist

$$U=-\sqrt{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\frac{\lambda_1\lambda_2}{\Theta}e^{-h^2\left(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^2}{n-2}\right)+\lambda_1\lambda_2\Theta\sqrt{-1}}\,d\lambda_1\,d\lambda_2\,d\Theta;$$

führt man hier an Stelle von λ_2 eine neue Variable x mittels der Gleichung

$$\lambda_2=x-\frac{\lambda_1}{n-1}$$

ein, so nimmt der zu integrierende Ausdruck die Form

$$\frac{\lambda_1}{\Theta}\left(x-\frac{\lambda_1}{n-1}\right)e^{-\frac{n}{n-1}h^2\lambda_1^2-\frac{\lambda_1^2}{n-1}\Theta\sqrt{-1}-\frac{n-1}{n-2}h^2x^2+\lambda_1 x\Theta\sqrt{-1}}\,d\lambda_1\,dx\,d\Theta$$

an und die Integration in Bezug auf x gibt (s. Anmerkung zu Art. 71)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(x-\frac{\lambda_1}{n-1}\right)e^{-\frac{n-1}{n-2}h^2x^2+\lambda_1\Theta x\sqrt{-1}}\,dx$$

$$=\frac{\lambda_1\sqrt{\pi}}{2h}\sqrt{\left(\frac{n-2}{n-1}\right)^3}\left(\frac{\Theta\sqrt{-1}}{h^2}-\frac{2}{n-2}\right)e^{-\frac{n-2}{n-1}\frac{\lambda_1^2\Theta^2}{4h^2}};$$

vollzieht man ferner in dem komplexen Teil

$$\left(\frac{\Theta\sqrt{-1}}{h^2} - \frac{2}{n-2}\right) e^{-\frac{\lambda_1^2}{n-1}\Theta\sqrt{-1}}$$

$$= \left(\frac{\Theta\sqrt{-1}}{h^2} - \frac{2}{n-2}\right)\left(\cos\frac{\lambda_1^2\Theta}{n-1} - \sqrt{-1}\sin\frac{\lambda_1^2\Theta}{n-1}\right)$$

die Trennung des Reellen vom Imaginären, so ergibt sich

$$\frac{\Theta}{h^2}\cos\frac{\lambda_1^2\Theta}{n-1} + \frac{2}{n-2}\sin\frac{\lambda_1^2\Theta}{n-1}$$

als Koeffizient von $\sqrt{-1}$. Hiernach wird

$$(8)\qquad U = \frac{\sqrt{\pi}}{2h^3}\sqrt{\left(\frac{n-2}{n-1}\right)^3}\, U_1 + \frac{\sqrt{\pi}}{(n-1)h}\sqrt{\frac{n-2}{n-1}}\, U_2,$$

worin

$$U_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda_1^2 e^{-\frac{n}{n-1}h^2\lambda_1^2} d\lambda_1 \int_0^{\infty} e^{-\frac{n-2}{n-1}\frac{\lambda_1^2\Theta^2}{4h^2}} \cos\frac{\lambda_1^2\Theta}{n-1}\, d\Theta$$

$$U_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda_1^2 e^{-\frac{n}{n-1}h^2\lambda_1^2} d\lambda_1 \int_0^{\infty} e^{-\frac{n-2}{n-1}\frac{\lambda_1^2\Theta^2}{4h^2}} \sin\frac{\lambda_1^2\Theta}{n-1}\,\frac{d\Theta}{\Theta}.$$

Die auf Θ bezügliche Integration gibt, und zwar in U_1,

$$\frac{h\sqrt{\pi}}{\lambda_1}\sqrt{\frac{n-1}{n-2}}\, e^{-\frac{h^2\lambda_1^2}{(n-1)(n-2)}},$$

in U_2*)

---

*) Das erste dieser beiden Resultate erhält man mit Hilfe der zu Art. 38 entwickelten Formel

$$\int_0^{\infty} e^{-a^2x^2}\cos rx\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{-\frac{r^2}{4a^2}} \qquad (a > 0);$$

integriert man beiderseits in Bezug auf den Parameter r zwischen den Grenzen 0 und r, so wird

$$\int_0^{\infty} e^{-a^2x^2}\frac{\sin rx}{x}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}\int_0^{r} e^{-\frac{r^2}{4a^2}} dr$$

$$= \frac{r\sqrt{\pi}}{2a}\int_0^{1} e^{-\frac{r^2y^2}{4a^2}} dy, \qquad (a > 0)$$

wenn man schliesslich unter dem Integralzeichen ry an Stelle von r schreibt, und auf Grund dieser Formel ist das zweite der obigen Resultate zu Stande gekommen.

$$\frac{h\lambda_1\sqrt{\pi}}{n-1}\sqrt{\frac{n-1}{n-2}}\int_0^1 e^{-\frac{h^2\lambda_1^2 y^2}{(n-1)(n-2)}}\,dy.$$

Hiermit wird weiter

$$U_1 = 2h\sqrt{\pi\frac{n-1}{n-2}}\int_0^\infty \lambda_1 e^{-\frac{n-1}{n-2}h^2\lambda_1^2}\,d\lambda_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{h}\sqrt{\frac{n-2}{n-1}}$$

und*)

$$U_2 = \frac{2h\sqrt{\pi}}{n-1}\sqrt{\frac{n-1}{n-2}}\int_0^1 dy\int_0^\infty \lambda_1^3 e^{-\frac{h^2\lambda_1^2}{n-1}\left(n+\frac{y^2}{n-2}\right)}d\lambda_1$$

$$= \frac{(n-1)\sqrt{\pi}}{h^3}\sqrt{\frac{n-1}{n-2}}\int_0^1 \frac{dy}{\left(n+\frac{y^2}{n-2}\right)^2}$$

$$= \frac{(n-1)\sqrt{\pi}}{2n^2h^3}\sqrt{\frac{n-1}{n-2}}\left(\frac{n(n-2)}{(n-1)^2}+\sqrt{n(n-2)}\arcsin\frac{1}{n-1}\right).$$

Werden diese Werte in den Ausdruck (8) eingeführt, so geht derselbe über in

$$U = \frac{\pi}{2nh^4}\left(n-2+\sqrt{\frac{n-2}{n}}\arcsin\frac{1}{n-1}\right);$$

dies also ist in (7) an Stelle des Integrals einzusetzen und gibt

$$M(|\lambda_1\lambda_2|) = \frac{1}{\pi n h^2}\left(\sqrt{n(n-2)}+\arcsin\frac{1}{n-1}\right).$$

Das $n(n-1)$fache hiervon ist $M([|\lambda_i\lambda_k|])$; auf Grund der Gleichungen (1), (2), (3) ergibt sich also für das Quadrat des mittleren Fehlers der Formel

$$\vartheta = \frac{[|\lambda|]}{\sqrt{n(n-1)}},$$

*) Es ist

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1+a^2x^2)^2} = \frac{1}{2(1+a^2)}+\frac{1}{2a}\operatorname{arc\,tg} a$$

$$= \frac{1}{2(1+a^2)}+\frac{1}{2a}\arcsin\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}.$$

wenn man durchwegs an Stelle von h, μ ihre Darstellungen durch ϑ einführt, der Ausdruck

$$\left(\frac{\pi}{2n}+\frac{\sqrt{n(n-2)}+\arcsin\frac{1}{n-1}}{n}-1\right)\vartheta^2;$$

die Quadratwurzel daraus ist der mittlere Fehler selbst und man hat als endgiltiges Resultat die Formel

$$(9)\quad \vartheta=\frac{[|\lambda|]}{\sqrt{n(n-1)}}\left(1\mp\sqrt{\frac{1}{n}\left(\frac{\pi}{2}+\sqrt{n(n-2)}-n+\arcsin\frac{1}{n-1}\right)}\right).$$

Entwickelt man $\frac{1}{n}$, $\arcsin\frac{1}{n-1}$ und

$$\sqrt{n(n-2)}=(n-1)\sqrt{1-\left(\frac{1}{n-1}\right)^2}$$

nach Potenzen von $\frac{1}{n-1}$, und beschränkt man sich in der Voraussetzung, dass n gross ist, auf Glieder von der Ordnung $\frac{1}{n-1}$, so reduziert sich der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen auf $\frac{\pi-2}{2(n-1)}$ und man hat dann näherungsweise*)

$$(10)\qquad \vartheta=\frac{[|\lambda|]}{\sqrt{n(n-1)}}\left(1\mp\sqrt{\frac{\pi-2}{2(n-1)}}\right).$$

73. Der Gedanke, zur Beurteilung der Genauigkeit einer Beobachtungsreihe statt der Abweichungen der einzelnen Beobachtungen vom arithmetischen Mittel ihre Abweichungen unter einander, mit andern Worten statt der scheinbaren Fehler die Beobachtungsdifferenzen zu verwenden, ist von Jordan**) ausgegangen und von Andrae***) und Helmert†) weiter ausgebildet worden.

---

*) Eine andere Formel zur Berechnung von ϑ aus $[|\lambda|]$ ist von Fechner angegeben (Poggendorff's Ann., Jubelbd., pag. 66 flg.) und ihre Genauigkeit von Helmert ermittelt worden (Astron. Nachr., Bd. 88, Nr. 2096—97).

**) Astron. Nachr., 1869, Bd. 74, Nr. 1766—67. — Wohl unabhängig von Jordan hat Bréget (Compt. rend., XCIII, pag. 1119) die Anwendung der Beobachtungsdifferenzen zur Bestimmung der Präzision einer Beobachtungsreihe vorgeschlagen und die Richtigkeit der weiter unten abgeleiteten Gleichungen (1), (2) auch experimentell geprüft.

***) Ibid., Bd. 74, Nr. 1770; Bd. 79, Nr. 1889. Vgl. weiter Bd. 80, Nr. 1901, 1908.

†) Ibid., Bd. 88, Nr. 2096—97.

Sind $l_1, l_2, \ldots l_n$ die Resultate von n gleich genauen Beobachtungen, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ die wahren, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ die scheinbaren Fehler, so dass $l_i + \varepsilon_i$ den wahren Wert der Unbekannten, $l_i + \lambda_i$ das aus den Beobachtungen abgeleitete arithmetische Mittel bedeutet, so ist

$$l_i + \varepsilon_i = l_k + \varepsilon_k, \qquad l_i + \lambda_i = l_k + \lambda_k,$$

folglich

$$l_i - l_k = \varepsilon_k - \varepsilon_i = \lambda_k - \lambda_i.$$

Jede Beobachtungsdifferenz ist hiernach dem Unterschied der wahren oder scheinbaren Fehler der verglichenen Beobachtungen gleich, befolgt daher das Gauss'sche Gesetz, wenn die Beobachtungsfehler es befolgen. Denn bezeichnet man sie mit d, die Wahrscheinlichkeit, dass ihr Wert zwischen d und $d + \delta d$ falle, mit $\psi(d)\delta d$*), so ist

$$\psi(d)\delta d = \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^2 \int\int e^{-h^2(\varepsilon_i^2+\varepsilon_k^2)}\, \delta\varepsilon_i \delta\varepsilon_k,$$

das Integral auf dem Gebiet $d \leqq \varepsilon_k - \varepsilon_i \leqq d + \delta d$ gebildet; und setzt man $\varepsilon_k = \varepsilon_i + u$, so geht dies über in

$$\psi(d)\delta d = \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^2 \int_d^{d+\delta d} \delta u \int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2(\varepsilon_i^2+(\varepsilon_i+u)^2)}\, \delta\varepsilon_i$$

$$= \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_d^{d+\delta d} e^{-\frac{h^2}{2}u^2} \delta u \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2h^2\left(\varepsilon_i + \frac{u}{2}\right)^2} \delta\varepsilon_i$$

$$= \frac{h}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{h^2}{2}d^2} \delta d.$$

Die Reihe der Beobachtungsdifferenzen verhält sich also wie eine Reihe von Beobachtungsfehlern mit dem Präzisionsmaass $\frac{h}{\sqrt{2}}$. Bezeichnet man daher mit D^2 das mittlere Quadrat von d, mit $\mathfrak{D}$ den mittleren Wert von $|d|$, dagegen

---

*) Ausnahmsweise wird hier für das Differential das Zeichen δ gebraucht, um für die Beobachtungsdifferenz das übliche Zeichen d beibehalten zu können.

mit μ den mittleren, mit ϑ den durchschnittlichen Wert von ε, so ist

$$(1) \qquad D = \mu\sqrt{2},$$

$$(2) \qquad \mathfrak{D} = \vartheta\sqrt{2}.$$

74. Wenn s unabhängige Beobachtungsdifferenzen $d_1, d_2, \ldots d_s$ gegeben sind, welche durch Vergleichung gleich genauer Beobachtungen gewonnen wurden, so sind

$$D = \sqrt{\frac{[dd]}{s}}$$

$$\mathfrak{D} = \frac{[|d|]}{s}$$

die wahrscheinlichsten Bestimmungen, welche sie für D und $\mathfrak{D}$ liefern. Verbindet man dieselben mit den vorhin gefundenen Gleichungen (1), (2), so ergeben sich für den mittleren und durchschnittlichen Fehler einer Beobachtung die Werte

$$(1) \qquad \mu = \sqrt{\frac{[dd]}{2s}}$$

$$(2) \qquad \vartheta = \frac{[|d|]}{s\sqrt{2}}.$$

Aus n Beobachtungen $l_1, l_2, \ldots l_n$ lassen sich

$$s = \frac{n(n-1)}{2}$$

verschiedene Paare und eben so viele Differenzen bilden; denkt man sich beispielsweise die Beobachtungen nach steigender Grösse geordnet, so ergeben sich die folgenden durchwegs positiven Differenzen:

$$(3) \qquad \begin{array}{lllll} l_2 - l_1 & & & & \\ l_3 - l_1 & l_3 - l_2 & & & \\ l_4 - l_1 & l_4 - l_2 & l_4 - l_3 & & \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \\ l_n - l_1 & l_n - l_2 & l_n - l_3 & \cdots & l_n - l_{n-1}. \end{array}$$

Diese aber sind nicht unabhängig von einander; vielmehr lassen sich aus n Beobachtungen nur $n-1$ unabhängige Differenzen ableiten.

Sieht man aber von dieser Unabhängigkeit ab, so geben die Formeln (1) und (2) auf Grund von n Beobachtungen die Bestimmungen

$$\mu = \sqrt{\frac{[dd]}{n(n-1)}} \tag{4}$$

$$\vartheta = \frac{[|d|]\sqrt{2}}{n(n-1)}. \tag{5}$$

Die Richtigkeit der ersten Formel hat Andrae erwiesen. Man kann nämlich an die Stelle des Schema (3) das folgende setzen:

$$\begin{array}{lllll} \varepsilon_1 - \varepsilon_2 & & & & \\ \varepsilon_1 - \varepsilon_3 & \varepsilon_2 - \varepsilon_3 & & & \\ \varepsilon_1 - \varepsilon_4 & \varepsilon_2 - \varepsilon_4 & \varepsilon_3 - \varepsilon_4 & & \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ \varepsilon_1 - \varepsilon_n & \varepsilon_2 - \varepsilon_n & \varepsilon_3 - \varepsilon_n & \cdots & \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n \end{array} \tag{6}$$

und findet nun durch Summierung der Quadrate

$$[dd] = (n-1)[\varepsilon\varepsilon] - 2[\varepsilon_i\varepsilon_k]; \qquad (i < k)$$

es ist aber identisch

$$[\varepsilon]^2 = [\varepsilon\varepsilon] + 2[\varepsilon_i\varepsilon_k],$$

daher

$$[dd] = n[\varepsilon\varepsilon] - [\varepsilon]^2; \tag{7}$$

andererseits aber ist die Relation

$$n[\lambda\lambda] = n[\varepsilon\varepsilon] - [\varepsilon]^2$$

gefunden worden (s. Gleichung (4), Art. 63), folglich ist

$$[dd] = n[\lambda\lambda],$$

so dass die beiden Formeln, (4) und $\mu = \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n-1}}$, völlig gleichen Inhalt haben; welcher von beiden man aus praktischen Gründen den Vorzug zu geben hat, kann keinen Augenblick zweifelhaft sein, wenn man die Anzahlen n und $\frac{n(n-1)}{2}$ der λ einer- und der d andererseits ins Auge fasst.

Für die zweite Formel hat Helmert einen strengen Beweis geliefert, nachdem sie vorher schon von Andrae, jedoch nicht in allgemeiner Giltigkeit, abgeleitet worden war.

Auf Grund des Schema (6) ist

$$M([|d|]) = M([|\varepsilon_i - \varepsilon_k|]) \qquad (i < k)$$

und da jede der Differenzen $|\varepsilon_i - \varepsilon_k|$ denselben Mittelwert,

nämlich zufolge der Gleichung (2), Art. 73, den Mittelwert $\vartheta\sqrt{2}$ hat, so ist

$$M([|d|]) = \frac{n(n-1)}{2}\vartheta\sqrt{2}.$$

Setzt man die beobachtete Summe $[|d|]$ diesem ihrem Mittelwert gleich, so ergibt sich für ϑ thatsächlich der in (5) gefundene Ausdruck*).

75. Um den mittleren Fehler der Formel (5) des vorigen Artikels zu bestimmen**), — die Formel (4) kommt nach dem, was über sie oben bemerkt worden ist, nicht in Betracht — hat man den Mittelwert des Ausdrucks

$$\left(\frac{[|d|]\sqrt{2}}{n(n-1)} - \vartheta\right)^2 = \frac{2[|d|]^2}{n^2(n-1)^2} - 2\frac{[|d|]\sqrt{2}}{n(n-1)}\vartheta + \vartheta^2$$

zu bilden; dieser Mittelwert reduziert sich, da $\frac{[|d|]\sqrt{2}}{n(n-1)}$ den Durchschnittswert ϑ hat, auf

$$(1) \qquad \frac{2}{n^2(n-1)^2} M([|d|]^2) - \vartheta^2$$

und hängt von der Bestimmung von $M([|d|]^2)$ ab.

Aus dem Schema (6), Art. 74, der d ergibt sich, dass das Quadrat ihrer Summe dreierlei Glieder umfasst und zwar:

---

*) Die Ausführung dieses Ausdruckes, nämlich die Berechnung von $[|d|]$ kann man sich nach einer Bemerkung Andrae's (l. c., Bd. 79, Nr. 1889) wesentlich erleichtern. In dem Schema (3), wo sämtliche Differenzen als positiv vorausgesetzt werden, ergibt die erste Kolonne mit der letzten Zeile $(n-1)(l_n - l_1)$; von den übrig bleibenden Differenzen reduzieren sich wieder jene der ersten Kolonne und der letzten Zeile auf $(n-3)(l_{n-1} - l_2)$, u. s. f., so dass man erhält

$$[|d|] = (n-1)(l_n - l_1) + (n-3)(l_{n-1} - l_2) + (n-5)(l_{n-2} - l_3) + \cdots,$$

wobei das letzte Glied

$$l_{\frac{n}{2}+1} - l_{\frac{n}{2}} \quad \text{oder} \quad 2\left(l_{\frac{n+3}{2}} - l_{\frac{n-1}{2}}\right),$$

je nachdem n eine gerade oder ungerade Zahl ist; im ersten Falle ist die Anzahl der aus den Beobachtungen zu bildenden Differenzen $\frac{n}{2}$, im zweiten $\frac{n-1}{2}$.

**) Helmert, Astron Nachr, Bd. 88, Nr. 2096–97.

Quadrate und Produkte unabhängiger und Produkte abhängiger Differenzen, so dass

$$[|d|]^2 = [(\varepsilon_i - \varepsilon_k)^2] + [|(\varepsilon_i - \varepsilon_k)(\varepsilon_{i'} - \varepsilon_{k'})|] + [|(\varepsilon_i - \varepsilon_k)(\varepsilon_i - \varepsilon_{k'})|].$$

In jeder der drei Summen hat jedes Glied denselben Mittelwert; diese drei Mittelwerte mögen der Reihe nach mit M_1, M_2, M_3 bezeichnet werden.

Die erste Summe umfasst $\frac{n(n-1)}{2}$ Glieder; in der zweiten ist jedes $\varepsilon_i - \varepsilon_k$ mit den $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ übrigen $\varepsilon_{i'} - \varepsilon_{k'}$ verbunden, die Anzahl ihrer Glieder daher $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4}$; im dritten Gliede endlich ist jedes $\varepsilon_i - \varepsilon_k$ zunächst mit den $n-2$ übrigen $\varepsilon_i - \varepsilon_{k'}$ und ebenso mit den $n-2$ übrigen $\varepsilon_{i'} - \varepsilon_k$ verbunden, die Anzahl seiner Bestandteile ist also $n(n-1)(n-2)$. Demnach hat man

$$(2)\quad M([|d|]^2) = \frac{n(n-1)}{2}\left(M_1 + \frac{(n-2)(n-3)}{2}M_2 + 2(n-2)M_3\right).$$

Nun folgt aus $(\varepsilon_i - \varepsilon_k)^2 = \varepsilon_i^2 + \varepsilon_k^2 - 2\varepsilon_i\varepsilon_k$, dass

$$(3)\qquad M_1 = 2\mu^2 = \frac{1}{h^2};$$

ferner ist vermöge der Gleichung (2), Art. 73,

$$(4)\quad M_2 = M(|\varepsilon_i - \varepsilon_k|)M(|\varepsilon_{i'} - \varepsilon_{k'}|) = 2\vartheta^2 = \frac{2}{\pi h^2}.$$

Für M_3 endlich ergibt sich mit Hilfe des Diskontinuitätsfaktors die Darstellung

$$M_3 = \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^3 \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)e^{-h^2(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2)}$$
$$\cdot\frac{\sin(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)\Theta}{\Theta}\,d\varepsilon_1\,d\varepsilon_2\,d\varepsilon_3\,d\Theta.$$

Wenn man den Wert des vierfachen Integrals mit U bezeichnet, so ist

$$U = -\sqrt{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)}{\Theta}$$
$$\cdot\, e^{-h^2(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2)+(\varepsilon_1-\varepsilon_2)(\varepsilon_1-\varepsilon_3)\Theta\sqrt{-1}}\,d\varepsilon_1\,d\varepsilon_2\,d\varepsilon_3\,d\Theta;$$

hier kann die auf ε_3 bezügliche Integration nach den zu Art. 71 entwickelten Formeln vollzogen werden und gibt

$$\int_{-\infty}^{\infty}(\varepsilon_1 - \varepsilon_3) e^{-h^2\varepsilon_3^2-(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\varepsilon_3\Theta\sqrt{-1}}\,d\varepsilon_3$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{h}\left(\varepsilon_1 + \frac{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\Theta}{2h^2}\sqrt{-1}\right) e^{-\frac{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2\Theta^2}{4h^2}},$$

womit

$$U = -\sqrt{-1}\,\frac{\sqrt{\pi}}{h}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\Theta}\left(\varepsilon_1 + \frac{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\Theta}{2h^2}\sqrt{-1}\right)$$

$$\cdot\, e^{-h^2(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2)-\frac{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2\Theta^2}{4h^2}+\varepsilon_1(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\Theta\sqrt{-1}}\,d\varepsilon_1\,d\varepsilon_2\,d\Theta.$$

Zum Zwecke der weiteren Trennung der Integrationen setze man

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2}(\xi + \eta)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{2}(\xi - \eta);$$

dadurch wird

$$U = -\sqrt{-1}\,\frac{\sqrt{\pi}}{4h}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\frac{\eta}{\Theta}\left(\xi + \eta + \frac{\eta\Theta}{h^2}\sqrt{-1}\right)$$

$$\cdot\, e^{-\frac{h^2}{2}(\xi^2+\eta^2)-\frac{\eta^2\Theta^2}{4h^2}+\eta\frac{\xi+\eta}{2}\Theta\sqrt{-1}}\,d\xi\,d\eta\,d\Theta;$$

die Integration in Bezug auf ξ liefert

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\xi + \eta\left(1 + \frac{\Theta}{h^2}\sqrt{-1}\right)\right\} e^{-\frac{h^2}{2}\xi^2+\frac{\xi\eta\Theta}{2}\sqrt{-1}}\,d\xi$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi}}{h}\,\eta\left(1 + \frac{3\Theta}{2h^2}\sqrt{-1}\right) e^{-\frac{\eta^2\Theta^2}{8h^2}},$$

und wenn man aus dem komplexen Anteil der noch übrig bleibenden Funktion unter dem Integralzeichen

$$\left(1 + \frac{3\Theta}{2h^2}\sqrt{-1}\right) e^{\frac{\eta^2\Theta}{2}\sqrt{-1}}$$

$$= \left(1 + \frac{3\Theta}{2h^2}\sqrt{-1}\right)\left(\cos\frac{\eta^2\Theta}{2} + \sqrt{-1}\sin\frac{\eta^2\Theta}{2}\right)$$

den imaginären Teil ausscheidet, so wird (s. Art. 72)

$$U = \frac{3\pi\sqrt{2}}{4h^4}\int\limits_0^\infty \eta^2 e^{-\frac{h^2}{2}\eta^2} d\eta \int\limits_0^\infty e^{-\frac{3\eta^2}{8h^2}\Theta^2} \cos\frac{\eta^2\Theta}{2}\, d\Theta$$

$$+ \frac{\pi\sqrt{2}}{2h^2}\int\limits_0^\infty \eta^2 e^{-\frac{h^2}{2}\eta^2} d\eta \int\limits_0^\infty e^{-\frac{3\eta^2}{8h^2}\Theta^2} \sin\frac{\eta^2\Theta}{\Theta}\frac{d\Theta}{\Theta}$$

$$= \frac{2\pi\sqrt{3\pi}}{4h^3}\int\limits_0^\infty \eta e^{-\frac{2h^2}{3}\eta^2} d\eta + \frac{\pi\sqrt{3\pi}}{3h}\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^\infty \eta^3 e^{-\frac{h^2}{2}\left(1+\frac{y^2}{3}\right)\eta^2} d\eta$$

$$= \frac{6\pi\sqrt{3\pi}}{16h^5} + \frac{2\pi\sqrt{3\pi}}{6h^5}\int\limits_0^1 \frac{dy}{\left(1+\frac{y^2}{3}\right)^2}$$

$$= \frac{\pi\sqrt{3\pi}}{2h^5} + \frac{\pi^2\sqrt{\pi}}{12h^5}.$$

Führt man diesen Wert in den Ausdruck für M_3 an Stelle des Integrals ein, so findet sich

$$(5) \qquad M_3 = \frac{\sqrt{3}}{\pi h^2} + \frac{1}{6h^2}.$$

Die Einsetzung der für M_1, M_2, M_3 gefundenen Werte (3), (4), (5) in (2) gibt

$$M([|d|]^2) = \frac{n(n-1)}{2h^2}\left(\frac{n+1}{3} + (n-2)\frac{n-3+2\sqrt{3}}{\pi}\right),$$

so dass auf Grund der Gleichung (1) das mittlere Fehlerquadrat der untersuchten Formel gleich wird

$$\frac{1}{n(n-1)\pi h^2}\left\{\frac{n+1}{3}\pi + 2(n-2)\sqrt{3} - 4n + 6\right\}.$$

Man hat also, mit Hinzufügung des mittleren Fehlers,

$$(6) \quad \vartheta = \frac{[|d|]\sqrt{2}}{n(n-1)}\left\{1 \mp \sqrt{\frac{\frac{n+1}{3}\pi + 2(n-2)\sqrt{3} - 4n + 6}{n(n-1)}}\right\}.$$

76. Bei Beurteilung des praktischen Wertes der verschiedenen Formeln für μ und ϑ kommt neben der erforderlichen Rechenarbeit die jeweilen erreichbare Sicherheit in Betracht. In ersterer Beziehung halten sich die beiden

Formeln für ϑ, deren eine die scheinbaren Fehler, die andere die Beobachtungsdifferenzen in Rechnung bringt, nahezu das Gleichgewicht und sind der Formel für μ, welche die Quadrate der scheinbaren Fehler erfordert, vorzuziehen. Was die relative Genauigkeit der drei Formeln betrifft, so mag die folgende kleine Tabelle Aufschluss geben, aus welcher der mittlere Fehler von μ, ϑ in Bruchteilen dieser Grössen für verschiedene Werte von n zu entnehmen ist.

n	μ	ϑ aus $[\|\lambda\|]$	ϑ aus $[\|d\|]$
2	0,6358	0,7555	0,7555
3	0,4770	0,5249	0,5249
4	0,3967	0,4298	0,4247
5	0,3465	0,3725	0,3658
10	0,2338	0,2497	0,2411
20	0,1617	0,1728	0,1650
30	0,1310	0,1400	0,1333
40	0,1130	0,1208	0,1148
50	0,1010	0,1078	0,1024
60	0,0921	0,0981	0,0933
70	0,0851	0,0907	0,0862
80	0,0795	0,0849	0,0806
90	0,0750	0,0798	0,0759
100	0,0719	0,0759	0,0720

Der Tabelle liegen die Formeln (6), Art. 68, (9), Art. 72 und (6), Art. 75 zu Grunde. Sie bestätigt aufs Neue, dass der mittlere Fehler μ die sicherste Beurteilung der Genauigkeit bietet, zeigt aber auch, dass mit zunehmendem n die Formeln für ϑ, insbesondere die mit $[|d|]$ rechnende, sich in Rücksicht auf Genauigkeit der Formel für μ beständig nähern.

77. In Artikel 25 ist gezeigt worden, dass, sofern die Fehler einer Beobachtungsreihe das Gesetz $\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2}$ befolgen, der Fehler des arithmetischen Mittels aus n Beobachtungen der Reihe dem Gesetze $\frac{h\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}} e^{-n h^2 \varepsilon^2}$ unterworfen ist; es steht

also das Präzisionsmaass der einzelnen Beobachtung zu jenem des arithmetischen Mittels in dem Verhältnis $1 : \sqrt{n}$, und das umgekehrte Verhältnis weisen der mittlere, durchschnittliche und wahrscheinliche Fehler einer Beobachtung einerseits und des arithmetischen Mittels andererseits auf.

Beziehen sich also die Grössen μ, ϑ, r auf die einzelne Beobachtung, die Grössen M, Θ, R auf das arithmetische Mittel, so hat man die Bestimmungen

$$M = \frac{\mu}{\sqrt{n}}, \qquad \Theta = \frac{\vartheta}{\sqrt{n}}, \qquad R = \frac{r}{\sqrt{n}}.$$

Legt man einer einzelnen Beobachtung das Gewicht Eins bei, so kommt dem arithmetischen Mittel aus n Beobachtungen das Gewicht n zu.

78. Die vorgetragenen Theorien über die Genauigkeit des aus einer Beobachtungsreihe abgeleiteten Resultates gehen von der Voraussetzung aus, dass das Präzisionsmaass der Beobachtungsreihe eine völlig unbekannte Grösse sei, deren mögliche Werte alle die nämliche Wahrscheinlichkeit haben, und dass die Widersprüche zwischen den Beobachtungen, die sich in ihren gegenseitigen Differenzen oder in ihren Abweichungen vom arithmetischen Mittel äussern, das einzige Mittel zur Bestimmung von h darbieten.

Man kann sich aber auch auf den entgegengesetzten Standpunkt stellen und h als eine von früher her so genau bekannte Grösse ansehen, dass das Ergebnis einiger weiteren Beobachtungen an ihrem Werte nichts zu ändern vermag. Dies wäre der Fall, wenn ein Beobachter von genau bekannter Qualität mit einem Instrument von erprobten Eigenschaften und bekannter Leistungsfähigkeit Messungen anstellte unter Verhältnissen, welche keinen Verdacht zulassen, dass andere Fehlerursachen einwirkten, als die bei diesem Beobachter und dem von ihm angewandten Instrument gewöhnlich thätigen. Es entsteht die Frage, ob der Grad der Übereinstimmung der Beobachtungen unter einander das Vertrauen beeinflussen kann, welches man dem aus ihnen abgeleiteten Resultat entgegenzubringen hat, und in welcher Weise dies geschieht. Mit der Lösung dieser Frage hat

Bertrand*) sich beschäftigt und ist zu dem Resultat gekommen, dass in solchem Falle der mittlere Fehler des arithmetischen Mittels von dem Grade der Übereinstimmung der Beobachtungen unabhängig ist.

Es seien $l_1, l_2, \ldots l_n$ die Beobachtungsergebnisse, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ ihre Fehler, h das bekannte Präzisionsmaass. Nimmt man das arithmetische Mittel für den wahren Wert, so ist

$$\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n}{n} = \left[\frac{\varepsilon}{n}\right]$$

der begangene Fehler (s. Gleichung (2), Art. 63). Er hängt mit der Summe der Fehlerquadrate und mit der Summe der Quadrate aller Beobachtungsdifferenzen, welche mit Σ^2 bezeichnet werden möge, durch die in Art. 74 abgeleitete Gleichung (7)

$$\text{(1)} \qquad \left[\frac{\varepsilon}{n}\right]^2 = \frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n} - \frac{\Sigma^2}{n^2}$$

zusammen; sind die Beobachtungen ausgeführt, so ist Σ^2 eine bekannte Grösse und daher der Mittelwert von $\left[\frac{\varepsilon}{n}\right]^2$ oder das Quadrat des mittleren Fehlers im arithmetischen Mittel

$$\text{(2)} \qquad M^2 = \frac{M([\varepsilon\varepsilon])}{n} - \frac{\Sigma^2}{n^2}.$$

Nun ist die Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen der Fehler $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ gleich

$$\text{(3)} \qquad \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-h^2[\varepsilon\varepsilon]} d\varepsilon_1 \, d\varepsilon_2 \cdots d\varepsilon_n$$

und da h bekannt ist, so ist dies zugleich die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der Fehlerquadrate einen gegebenen Wert besitze. Es können aber nur solche Werte dieser Summe in Betracht kommen, welche mit den beobachteten Differenzen vereinbar sind.

Aus den $\frac{n(n-1)}{2}$ Differenzen der n Beobachtungen können nur $n - 1$ gewählt werden, welche unter einander unabhängig sind; als solche können beispielsweise

---

*) Compt. rend., CVI, pag. 887 flg. und Calc. des Probab., art. 174.

(4) $\varepsilon_n - \varepsilon_1 = \eta_1, \quad \varepsilon_n - \varepsilon_2 = \eta_2, \quad \ldots \quad \varepsilon_n - \varepsilon_{n-1} = \eta_{n-1}$

genommen werden; wir führen sie nebst der Grösse ϱ, welche durch die Gleichung

(5) $$\varrho^2 = [\varepsilon\varepsilon]$$

definiert ist, als neue Variable ein und transformieren demgemäss den Ausdruck (3), indem wir ihn als Element eines n-fachen Integrals ansehen.

Die Determinante der neuen Variabeln $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_{n-1}, \varrho$ in Bezug auf die ursprünglichen ist

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \\ \frac{\varepsilon_1}{\varrho} & \frac{\varepsilon_2}{\varrho} & \frac{\varepsilon_3}{\varrho} & \cdots & \frac{\varepsilon_{n-1}}{\varrho} & \frac{\varepsilon_n}{\varrho} \end{vmatrix}$$

und hat den Absolutwert $\frac{|[\varepsilon]|}{\varrho}$, wie man sich leicht überzeugt, indem man die $n-1$ ersten Zeilen, nachdem sie mit $\frac{\varepsilon_1}{\varrho}, \frac{\varepsilon_2}{\varrho}, \ldots \frac{\varepsilon_{n-1}}{\varrho}$ multipliziert worden sind, zur n^{ten} Zeile addiert. Hiernach geht (3) über in

$$\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-h^2\varrho^2} \frac{\varrho\, d\eta_1\, d\eta_2 \ldots d\eta_{n-1}\, d\varrho}{|[\varepsilon]|}$$

und wenn man $|[\varepsilon]|$ durch den aus (1) resultierenden Ausdruck ersetzt, in

$$\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-h^2\varrho^2} \frac{\varrho\, d\eta_1\, d\eta_2 \ldots d\eta_{n-1}\, d\varrho}{\sqrt{n\varrho^2 - \Sigma^2}}.$$

Dies also ist die Wahrscheinlichkeit, dass mit den beobachteten Differenzen eine Fehlerquadratsumme vom Betrage ϱ zusammentreffe. Zugleich erkennt man, dass ϱ^2 nur solcher Werte fähig ist, für welche $n\varrho^2 > \Sigma^2$ oder $\varrho > \frac{\Sigma}{\sqrt{n}}$. Auf Grund dieser Wahrscheinlichkeit kommt der mittlere Wert von ϱ^2 gleich

$$\frac{\int\limits_{\frac{\Sigma}{\sqrt{n}}}^{\infty} e^{-h^2\varrho^2} \frac{\varrho^3 d\varrho}{\sqrt{n\varrho^2 - \Sigma^2}}}{\int\limits_{\frac{\Sigma}{\sqrt{n}}}^{\infty} e^{-h^2\varrho^2} \frac{\varrho\, d\varrho}{\sqrt{n\varrho^2 - \Sigma^2}}}$$

und auf Grund der Gleichung (2) ist das Quadrat des mittleren Fehlers im arithmetischen Mittel

$$(6) \qquad M^2 = \frac{\int\limits_{\frac{\Sigma}{\sqrt{n}}}^{\infty} e^{-h^2\varrho^2} \frac{\varrho^3 d\varrho}{\sqrt{n\varrho^2 - \Sigma^2}}}{n \cdot \int\limits_{\frac{\Sigma}{\sqrt{n}}}^{\infty} e^{-h^2\varrho^2} \frac{\varrho\, d\varrho}{\sqrt{n\varrho^2 - \Sigma^2}}} - \frac{\Sigma^2}{n^2}.$$

Sind die Beobachtungen widerspruchsfrei, so ist $\Sigma^2 = 0$ und es wird

$$M^2 = \frac{\int\limits_0^{\infty} e^{-h^2\varrho^2} \varrho^2 d\varrho}{n \int\limits_0^{\infty} e^{-h^2\varrho^2} d\varrho} = \frac{1}{2nh^2},$$

d. h. genau so gross, wie es mit Hilfe des bekannten h a priori hätte angegeben werden müssen. Es hat demnach unter den gemachten Voraussetzungen der Umstand, dass die Beobachtungen keinen Widerspruch aufweisen, auf das Urteil über die Zuverlässigkeit des Resultates keinen Einfluss. Die übliche Regel hätte für M den Wert Null ergeben und somit die Beobachtungen für fehlerfrei erklärt.

Es unterliegt keinem Zweifel, dass das für diesen extremen Fall gefundene Resultat auch für jeden andern Wert von Σ^2 Geltung haben werde, und man könnte hieraus schon den Schluss ziehen, dass der in (6) enthaltene Ausdruck für M^2 unabhängig sein müsse von Σ. Die Analyse bestätigt diesen

Schluss. Führt man nämlich an Stelle von ϱ die neue Variable u mittels der Gleichung

$$\Sigma^2 u^2 = n\varrho^2 - \Sigma^2$$

ein, so nimmt das erste Glied der rechten Seite von (6) die Form

$$\frac{\Sigma^2}{n^2} \frac{\int\limits_0^\infty e^{-\frac{h^2\Sigma^2}{n}(1+u^2)}(1+u^2)\,du}{\int\limits_0^\infty e^{-\frac{h^2\Sigma^2}{n}(1+u^2)}\,du} = \frac{\Sigma^2}{n^2}\left\{1 + \frac{\int\limits_0^\infty e^{-\frac{h^2\Sigma^2}{n}u^2}u^2\,du}{\int\limits_0^\infty e^{-\frac{h^2\Sigma^2}{n}u^2}\,du}\right\}$$

an und wird, da das Integral im Zähler den Wert $\frac{n\sqrt{n\pi}}{4h^3\Sigma^3}$ und das Integral im Nenner den Wert $\frac{\sqrt{n\pi}}{2h\Sigma}$ hat, gleich

$$\frac{\Sigma^2}{n^2} + \frac{1}{2nh^2};$$

verbindet man dies mit dem zweiten Gliede $-\frac{\Sigma^2}{n^2}$, so ergibt sich

$$M^2 = \frac{1}{2nh^2}$$

thatsächlich unabhängig von Σ^2 und genau so gross, wie es a priori hätte angegeben werden müssen.

Dieses Ergebnis der Analyse scheint im ersten Augenblick den Eingebungen des gemeinen Verstandes zu widersprechen. Wenn die Beobachtungen unter einander vollkommen übereinstimmen, so ist man geneigt, dem Resultate ein höheres Vertrauen entgegenzubringen, als in dem Falle, wo sie Widersprüche zeigen. Und wenn diese Widersprüche beträchtlich werden, so wird, wenn man auch die Geschicklichkeit des Beobachters und die Güte seines Instrumentes kennt, der Verdacht rege, dass besondere störende Ursachen die Widersprüche hervorgerufen haben.

Die Analyse aber ist unter der ausdrücklichen Voraussetzung geführt worden, dass ein solcher Verdacht nicht begründet sei, dass die Beobachtungen vielmehr unter ganz normalen Verhältnissen seien durchgeführt worden. Dann

muss sowohl die Übereinstimmung im ersten wie das Vorhandensein von Widersprüchen im zweiten Falle lediglich dem Zufall zugeschrieben werden. In der That ist es nicht ausgeschlossen, dass der Zufall in mehreren aufeinander folgenden Beobachtungen denselben Fehler hervorruft und es liegt auch kein Grund für die Annahme vor, dass dieser Fehler klein sein müsste. In einem solchen Falle geht zugleich der Vorteil des arithmetischen Mittels verloren, welcher in der gegenseitigen Ausgleichung entgegengesetzter Fehler begründet ist.

§ 9. Vergleichung des Fehlergesetzes mit der Erfahrung.

79. Eine wesentliche Stütze des Gauss'schen Fehlergesetzes bildet die Übereinstimmung, welche zwischen seinen Folgerungen und den Ergebnissen wirklich ausgeführter Beobachtungen besteht. Sie hat dem Gesetze trotz der Bedenken, welche gegen die verschiedenen Begründungen vom theoretischen Standpunkte erhoben werden können, allgemeine Annahme von Seite der Beobachter eingebracht.

Der Mittel und Wege, solche Vergleiche zwischen Theorie und Erfahrung anzustellen, bietet sich eine grosse Zahl. Wir beginnen mit dem am häufigsten benützten Vorgange.

Es seien $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \varepsilon_n$ die wahren Fehler von n ausgeführten, gleich guten Beobachtungen. Dieselben werden zum Teil positiv, zum Teil negativ sein und die wahrscheinlichste Verteilung, welche a priori zu erwarten wäre, bestünde darin, dass beiderlei Fehler in gleicher — bei einem geraden n — oder in möglichst gleicher Anzahl — bei einem ungeraden n — auftreten. Die Wahrscheinlichkeit einer zwischen den Grenzen $-\alpha$ und $+\alpha$ liegenden Abweichung einer der beiden Anzahlen von ihrem wahrscheinlichsten Werte ist nach dem Bernoulli'schen Theorem für ein hinlänglich grosses n dargestellt durch

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\alpha\sqrt{\frac{2}{n}}} e^{-t^2}\,dt;$$

die wahrscheinliche Grenze dieser Abweichung ist somit

$$\alpha = \frac{\varrho}{\sqrt{2}}\sqrt{n} = 0{,}3372\cdots\sqrt{n},$$

so dass man bei n Beobachtungen Eins gegen Eins wetten darf, die Anzahl der positiven (und die der negativen) Fehler werde nicht ausserhalb der Grenzen

$$\frac{n}{2} \mp 0{,}3372\sqrt{n}$$

fallen, werde also beispielsweise bei 100 Beobachtungen zwischen 46 und 54 eingeschlossen sein.

Denkt man sich ferner die Fehler ohne Rücksicht auf das Vorzeichen in steigender Grösse geordnet und durch die Zahlwerte 0, α', α'', ... $\alpha^{(r)} = \infty$ in Gruppen abgeteilt, so mögen diese Gruppen der Reihe nach n', n'', ... $n^{(r)}$ Fehler umfassen. Ist das Präzisionsmaass h der Beobachtungsreihe bekannt, so hat man a priori unter n Fehlern

$$n\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{h\alpha^{(k)}} e^{-t^2}dt = n\Theta(h\alpha^{(k)})$$

solche zu erwarten, deren Absolutwert zwischen 0 und $\alpha^{(k)}$ gelegen ist, somit

$$n^{(k)} = n\{\Theta(h\alpha^{(k)}) - \Theta(h\alpha^{(k-1)})\}$$

Fehler, welche in die k^{te} Gruppe fallen. Führt man diese Rechnung für alle Gruppen durch, so gibt die Vergleichung der a priori zu erwartenden mit den wirklich beobachteten Anzahlen eine durchgreifende Prüfung der ganzen Fehlerreihe.

Kennt man an Stelle von h eine der Grössen μ, ϑ, r, so tritt an die Stelle von $\Theta(h\alpha^{(k)})$ beziehungsweise

$$\Theta\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\alpha^{(k)}}{\mu}\right), \quad \Theta\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\alpha^{(k)}}{\vartheta}\right), \quad \Theta\left(\varrho\frac{\alpha^{(k)}}{r}\right).$$

In allen Fällen wird man sich der Tafel der Funktion Θ bedienen. Eine dem letzten Fall angepasste Tafel, welche die Werte dieser Funktion nach dem Argument $\frac{\alpha}{r}$ geordnet enthält, ist am Ende des Buches als Tafel II gegeben. Sie ist von Encke, wahrscheinlich durch Interpolation aus

seiner ersten Tafel (s. Art. 47) konstruiert und im Berl. Astron. Jahrb. 1834 veröffentlicht worden*).

Wahre Fehler werden nur ausnahmsweise vorliegen. Ist statt dessen die Reihe der scheinbaren Fehler $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ gegeben, so werden diese ebenso wie die wahren dem Gauss-schen Gesetze folgen (s. Art. 66) und die Untersuchung bleibt die nämliche. Die Grössen μ, ϑ, r beziehen sich aber auf die Reihe der wahren Fehler und man hätte sie, um die entsprechenden Grössen für die Reihe der λ zu erhalten, mit $\sqrt{\frac{n-1}{n}}$ zu multiplizieren; indessen wird dies, wenn n einigermaassen gross ist, — und nur in diesem Falle hat die ganze Vergleichung Sinn und Bedeutung — an den Resultaten keine bemerkbare Änderung hervorbringen und kann wohl unterbleiben.

Ein weiteres Mittel, die Theorie mit der Erfahrung zu vergleichen, besteht in der mehrfachen Bestimmung einer und derselben, von dem Fehlergesetz abhängigen Grösse, etwa des wahrscheinlichen Fehlers aus dem mittleren und durchschnittlichen Fehler und durch Abzählung an der Fehlerreihe (eine Bestimmung, welche auf Grund der scheinbaren Fehler in noch höherem Maasse unsicher ist als sie sich schon bei Benützung der wahren Fehler erwiesen hat), oder des durchschnittlichen Fehlers aus den λ einerseits und den Beobachtungsdifferenzen d andererseits u. s. w.

Weitere Anhaltspunkte zu solchen Vergleichen werden sich noch weiter unten ergeben.

80. Die erste umfassende Prüfung des Gauss'schen Fehlergesetzes durch die Erfahrung hat Bessel**) ausgeführt, teils an Beobachtungsreihen von Bradley, teils an eigenen, und damit gleichsam den ersten praktischen Beweis

---

*) Es ist wohl einem Versehen zuzuschreiben, wenn Bertrand in seinem Calc. des Probab. Wuich, den Verfasser von „Die Theorie der Wahrscheinlichkeit und ihre Anwendung im Gebiete des Schiesswesens", als Autor dieser Tafel bezeichnet.

**) Astron. Nachr., Bd. 15, Nr. 358—359. — Die Reihen a) bis c) wurden bereits 1818 in den Fundam. astron., pag. 18 flg. veröffentlicht.

dieses Gesetzes gegeben. Die Resultate dieser Prüfung sind in den nachstehenden Tabellen a) bis d) mitgeteilt und zwar ist

a) hervorgegangen aus 300 Beobachtungen der Deklination einiger häufig beobachteten Sterne;

b) aus 300 Beobachtungen der Rectascensionen in Zeit ausgedrückt;

c) aus 470 Beobachtungen weit zusammengesetzterer Art, nämlich der Rectascensionen einiger Fixsterne, sowie sie aus ihren Rectascensionsunterschieden mit der Sonne, deren Rectascensionen aus ihren beobachteten Deklinationen berechnet worden sind, hervorgehen; sämtliche Beobachtungen von Bradley ausgeführt und auf je 100 reduziert.

Endlich d) aus 100 Rectascensionen des Polarsternes, welche Bessel 1813—15 mit dem älteren Passagen-Instrument der Königsberger Sternwarte beobachtet hat.

Der Vergleichung liegt jeweilen der mittlere Fehler einer Beobachtung zu Grunde. Die zweite Kolonne zeigt an, wie viele (scheinbare) Fehler in das entsprechende Intervall der ersten Kolonne thatsächlich gefallen sind, und wie viele, der Theorie gemäss, diesem Intervall angehören sollten ist aus der dritten Kolonne zu entnehmen, während die vierte Kolonne den Unterschied Theorie — Beobachtung angibt.

a) Beobachtungen der Deklinationen.

$\mu = \pm 1{,}''6237.$

Grenzen.	Beob.	Theorie.	Unterschied.
0,″0—0,″4	22,0	19,5	— 2,5
0,4—0,8	19,3	18,3	— 1,0
0,8—1,2	18,3	16,2	— 2,1
1,2—1,6	9,3	13,6	+ 4,3
1,6—2,0	9,0	10,6	+ 1,6
2,0—2,4	7,7	7,9	+ 0,2
2,4—2,8	3,3	5,5	+ 2,2
2,8—3,2	5,0	3,6	— 1,4
3,2—3,6	2,7	2,2	— 0,5
3,6—4,0	1,3	1,3	0,0
4,0 etc.	2,0	1,4	— 0,6

b) Beobachtungen der Rectascensionen.

$\mu = \pm 0{,}''2283$ Zeit.

Grenzen.	Beob.	Theorie.	Unterschied.
0,″0—0,″1	38,0	33,5	— 4,5
0,1—0,2	28,0	28,0	0,0
0,2—0,3	17,7	19,2	+ 1,5
0,3—0,4	8,0	10,9	+ 2,9
0,4—0,5	4,7	5,1	+ 0,4
0,5—0,6	2,0	2,0	0,0
0,6—0,7	1,0	0,7	— 0,3
0,7—0,8	0,3	0,2	— 0,1
0,8—0,9	0,3	0,0	— 0,3

c) Beobachtungen der absoluten Rectascensionen.

$\mu = \pm 0{,}''4033$ Zeit.

Grenzen.	Beob.	Theorie.	Unterschied.
0,″0—0,″1	20,0	19,6	— 0,4
0,1—0,2	18,7	18,4	— 0,3
0,2—0,3	16,6	16,3	— 0,3
0,3—0,4	12,4	13,6	+ 1,2
0,4—0,5	10,8	10,6	— 0,2
0,5—0,6	7,7	7,8	+ 0,1
0,6—0,7	5,5	5,4	— 0,1
0,7—0,8	3,0	3,6	+ 0,6
0,8—0,9	2,1	2,1	0,0
0,9—1,0	1,5	1,3	— 0,2
1,0 etc.	1,7	1,3	— 0,4

d) Rectascensionen des Polarsterns.

$\mu = \pm 1{,}''3093$ Zeit.

Grenzen.	Beob.	Theorie.	Unterschied.
0,″0—0,″4	25	24,0	— 1,0
0,4—0,8	22	21,9	— 0,1
0,8—1,2	19	18,2	— 0,8
1,2—1,6	11	13,7	+ 2,7

Grenzen.	Beob.	Theorie.	Unterschied.
″ ″			
1,6—2,0	9	9,5	+ 0,5
2,0—2,4	8	6,0	— 2,0
2,4—2,8	2	3,4	+ 1,4
2,8—3,2	3	1,8	— 1,2
3,2—3,6	1	0,9	— 0,1
3,6 etc.	0	0,6	+ 0,6

81. Ein in jüngster Zeit in ähnlicher Weise verarbeitetes, einem andern Gebiet entlehntes Beobachtungsmaterial bildet die Grundlage der folgenden zwei Tabellen*). Es besteht in den Schlussfehlern von 2238 Dreiecken der Triangulierung des Katasters in Modena.

Da der wahre Wert der Winkelsumme eines Dreiecks bekannt ist, so gibt der Unterschied der beobachteten Winkelsumme gegenüber jenem Werte ihren wahren Fehler, so dass man hierbei zu einer Reihe eigentlicher Beobachtungsfehler gelangt. Indessen ist aber die Winkelsumme nicht eine unmittelbar gemessene Grösse, sondern die Summe aus drei so gemessenen Grössen; befolgt aber der Fehler in der Messung eines Winkels das Gauss'sche Gesetz $\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 u^2}$, so folgt der Fehler der Summe dreier Winkel einem Gesetz von derselben Form, nämlich $\frac{h}{\sqrt{3\pi}} e^{-\frac{h^2}{3} u^2}$. Denn bezeichnet man die Fehler der drei Winkel eines Dreiecks mit $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, den Fehler der Winkelsumme mit u, so ist

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = u,$$

und nach Gleichung (4), Art. 60, ist

$$\frac{h}{\sqrt{3\pi}} e^{-\frac{h^2}{3} u^2} du$$

die Wahrscheinlichkeit dafür, dass $u \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \leq u + du$ oder dass der Fehler der Winkelsumme (der Schlussfehler des Dreiecks) zwischen u und $u + du$ gelegen sei.

*) Ausgeführt auf Anregung General Ferrero's durch Ingen. Guarducci in der Rivista di Topografia e Catasto, Roma; 1889.

Die beiden Tafeln, deren erste 661 Dreiecke mit dem mittleren Schlussfehler 14,08″ und deren zweite 1577 Dreiecke mit dem mittleren Schlussfehler 17,13″ umfasst, zeigen insofern eine andere Anordnung gegenüber jenen des vorigen Artikels, als sämtliche Intervalle mit Null beginnen und neben den beobachteten und berechneten Anzahlen auch die aposteriorischen und apriorischen Wahrscheinlichkeiten angegeben sind.

a) $n = 661$; $\mu = 14{,}08''$.

Grenzen	Beob. Fehleranzahl	Wahrsch. aposteriori	Wahrsch. a priori	Berechn. Fehleranzahl	Unterschied
$0 \cdots \alpha^{(k)}$	$n^{(k)}$	$\frac{n^{(k)}}{n}$	$\Theta\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\alpha^{(k)}}{\mu}\right)$	$n\Theta$	$n\Theta - n^{(k)}$
0 bis 1,768″	68	0,1029	0,1000	66	− 2
„ „ 3,566	139	0,2103	0,2000	132	− 7
„ „ 5,424	200	0,3026	0,3000	198	− 2
„ „ 7,383	265	0,4009	0,4000	264	− 1
„ „ 9,500	333	0,5038	0,5000	331	− 2
„ „ 14,08	457	0,6914	0,6827	451	− 6
„ „ 23,16	586	0,8866	0,9000	595	+ 9
„ „ 36,27	653	0,9879	0,9900	654	+ 1
„ „ 46,35	661	1,0000	0,9990	660	− 1
„ „ 54,79	661	1,0000	0,9999	661	0

b) $n' = 1577$; $\mu = 17{,}13''$.

Grenzen	Beob. Fehleranzahl	Wahrsch. aposteriori	Wahrsch. a priori	Berechn. Fehleranzahl	Unterschied
0 bis 2,141″	133	0,0843	0,1000	158	+ 25
„ „ 4,334	303	0,1921	0,2000	315	+ 12
„ „ 6,595	473	0,2999	0,3000	472	− 1
„ „ 8,976	632	0,4008	0,4000	631	− 1
„ „ 11,560	760	0,4819	0,5000	788	+ 28
„ „ 17,13	1044	0,6620	0,6827	1077	+ 33
„ „ 28,08	1408	0,8928	0,9000	1419	+ 11
„ „ 44,12	1570	0,9956	0,9900	1561	− 9
„ „ 56,39	1577	1,0000	0,9990	1575	− 2
„ „ 66,65	1577	1,0000	0,9999	1577	0

82. Als drittes Beispiel wählen wir eine Reihe von 40 mikroskopischen Bestimmungen der Lage eines Teilstrichs auf einem Maassstabe, welche in England ausgeführt und A. R. Clarke's Geodesy entnommen sind*). Die Beobachtungen sind von gleicher Genauigkeit und ergaben folgendes Resultat (die Einheit ist $\frac{1}{1000000}$ Yard oder 0,91 Mikrons):

3,68	2,81	5,48	3,28
3,11	4,65	3,76	3,78
4,76	3,27	4,59	3,22
2,75	4,08	2,64	3,98
4,15	4,51	2,98	3,91
5,08	4,43	4,21	5,21
2,95	3,43	5,23	4,43
6,35	3,26	4,45	2,28
3,78	2,48	3,95	4,10
4,49	4,84	2,66	4,18.

Das arithmetische Mittel ist 3,93, und die Abweichungen der einzelnen Beobachtungen von demselben oder ihre scheinbaren Fehler, in der nämlichen Ordnung zusammengestellt, sind die folgenden:

+ 0,25	+ 1,12	— 1,55	+ 0,65
+ 0,82	— 0,72	+ 0,17	+ 0,15
— 0,83	+ 0,66	— 0,66	+ 0,71
+ 1,18	— 0,15	+ 1,29	— 0,05
— 0,22	— 0,58	+ 0,95	+ 0,02
— 1,11	— 0,50	— 0,28	— 1,28
+ 0,98	+ 0,50	— 1,30	— 0,50
— 2,42	+ 0,67	— 0,52	+ 1,65
+ 0,15	+ 1,45	— 0,02	— 0,17
— 0,56	— 0,91	+ 1,27	— 0,25

Ihre Verteilung dem Vorzeichen nach kommt der wahrscheinlichsten sehr nahe, indem 19 positiven 21 negative λ gegenüberstehen, und liegt innerhalb der wahrscheinlichen Grenzen (etwa 17 und 23). Die algebraische Summe ist

*) Compt. rend., CVI, pag. 784.

14,64 — 14,58 = 0,06 statt 0,00 (wegen der Abkürzung des arithmetischen Mittels).

Aus der Summe der Quadrate $[\lambda\lambda] = 32{,}4364$ ergibt sich der mittlere Fehler einer Beobachtung

$$\mu = 0{,}912$$

und daraus der wahrscheinliche Fehler

$$r = 0{,}615;$$

aus der Summe der Absolutwerte der λ, $[|\lambda|] = 29{,}22$, berechnet sich der durchschnittliche Fehler einer Beobachtung

$$\vartheta = 0{,}742$$

und daraus in anderer Weise

$$r = 0{,}628;$$

andererseits folgt aus der Summe der Absolutwerte der Beobachtungsdifferenzen, $[|d|] = 815{,}40$,

$$\vartheta = 0{,}739$$

und daraus

$$r = 0{,}624;$$

die am wenigsten verlässliche Methode der Abzählung endlich führt zu

$$r = 0{,}66.$$

Die Verteilung der Fehler verglichen mit der theoretischen ergibt folgende Zahlen:

Grenzen.	Beob.	Theorie.	Unterschied.
0,0—0,5	15	16,6	+ 1,6
0,5—1,0	14	12,5	— 1,5
1,0—1,5	8	6,9	— 1,1
1,5 etc.	3	4,0	+ 1,0;

im Hinblick auf die nur mässige Anzahl der Beobachtungen kann die Übereinstimmung als befriedigend bezeichnet werden.

83. Es könnte noch eine grosse Zahl von Erfahrungsdaten aus den verschiedensten Gebieten beigebracht werden, welche geeignet sind zu bestätigen, dass es sehr viele Fälle gibt, in welchen die Fehler eine dem Gauss'schen Gesetz entsprechende Verteilung aufweisen. Wiederholt sind Messungen eigens zu dem Zwecke ausgeführt worden, um jenes

Gesetz zu prüfen oder um auf ihre Ergebnisse einen Beweis a posteriori für das Fehlergesetz zu gründen und dadurch jeder Hypothese über die Natur der Fehler, über die zweckmässigste Wahl des Wertes der beobachteten Grösse o. dgl. aus dem Wege zu gehen, da ohne eine solche ein Beweis a priori nicht gegeben werden kann. Diesem Gedanken hat u. a. Faye*) bestimmten Ausdruck verliehen und Laurent**) hat sich in ähnlichem Sinne der Mühe unterzogen, eine grössere Versuchsreihe auszuführen, um die Fehlerverteilung auf empirischem Wege festzustellen, da ihm die Gauss'sche Form der Wirklichkeit hauptsächlich aus dem Grunde nicht zu entsprechen schien, weil sie auch noch so grossen Fehlern eine von Null verschiedene Wahrscheinlichkeit zuschreibt. Indessen haben seine Versuche doch kein anderes Ergebnis gehabt als zu bestätigen, dass das Gauss'sche Gesetz jene Übereinstimmung mit der Erfahrung zeigt, die überhaupt erwartet werden kann.

Die Art der Durchführung dieser Versuche und ihr Ergebnis ist in Kürze das folgende. Ein Winkel von beiläufig 16^0, gebildet durch die Horizontalprojektionen zweier von einem festen Punkt nach zwei weit entfernten scharf bezeichneten Signalen gerichteten Strahlen, wurde mittels eines Theodoliten, der direkte Ablesung auf $1'$ gestattete, 1444 mal unter gleichen Umständen gemessen. Die Untersuchung des Instruments gab keinen Anlass, systematische Fehler zu befürchten. Da jede Ablesung nur auf ganze Minuten erfolgte, so entspricht der beobachtete Fehler ε einer Messung einem wirklichen Fehler zwischen den Grenzen $\left(\varepsilon - \frac{1}{2}\right)'$ und $\left(\varepsilon + \frac{1}{2}\right)'$. Bezeichnet nun n_ε die Anzahl der Fehler von der Grösse ε in den n Beobachtungen, so ist $\frac{n_\varepsilon}{n}$ die Wahrscheinlichkeit a posteriori für einen Fehler zwischen den Grenzen $\varepsilon - \frac{1}{2}$ und $\varepsilon + \frac{1}{2}$, und ihre Abweichung von der Wahrscheinlichkeit a priori bewegt sich mit der Wahrscheinlichkeit

*) Comptes rendus, LXXX, pag. 352.

**) Journ. Liouville, III, 1, pag. 75.

$$\Theta(\gamma) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-t^2} dt, \qquad \text{worin} \qquad \gamma = l_\varepsilon \sqrt{\frac{n^3}{2 n_\varepsilon (n - n_\varepsilon)}},$$

zwischen den Grenzen $\mp l_\varepsilon$; nimmt man $\Theta(\gamma) = 0{,}99$, so sind

$$l_\varepsilon = \mp 1{,}82 \sqrt{\frac{2 n_\varepsilon (n - n_\varepsilon)}{n^3}}$$

die entsprechenden Grenzen. Nun ergaben die Messungen, verglichen mit einem vorher bestimmten Näherungswert des Winkels, folgende Abweichungen und in nachstehender Anzahl:

Abweichung:	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Beobachtete Anzahl:	4	16	26	53	103	247	343	294	208	85	26	22	11	6

Zu den hieraus berechneten Werten von $\frac{n_\varepsilon}{n}$ wurden nach der obigen Formel die Grenzen l_ε bestimmt, sodann die unteren sowohl als die oberen Grenzen der Wahrscheinlichkeit $\frac{n_\varepsilon}{n} - l_\varepsilon$ und $\frac{n_\varepsilon}{n} + l_\varepsilon$ graphisch aufgetragen und zwischen die so erhaltenen Punkte eine Kurve mit möglichster Einhaltung der Symmetrie gegen die Ordinate im arithmetischen Mittel aus sämtlichen Fehlern, d. i. 1,33, und von möglichst regelmässigem Verlauf eingelegt. Das Ergebnis dieser graphischen Ausgleichung, bezogen auf jenes arithmetische Mittel als Nullpunkt, wurde mit dem Gaussschen Gesetz verglichen, welchem zufolge die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers zwischen den Grenzen $\varepsilon - \frac{1}{2}$ und $\varepsilon + \frac{1}{2}$ gegeben ist durch

$$\frac{1}{2}\left\{\Theta\left(h\overline{\varepsilon + \tfrac{1}{2}}\right) - \Theta\left(h\overline{\varepsilon - \tfrac{1}{2}}\right)\right\};$$

da die Erfahrung für $\varepsilon = 0$ die Wahrscheinlichkeit 0,241 ergab, so war h aus der Gleichung

$$\Theta\left(\frac{h}{2}\right) = 0{,}241$$

zu rechnen und es fand sich $h = 0{,}434$. Das Resultat ist nun folgendes:

Wahrscheinlichkeit.

Fehler.	Beob.	Theorie.	Unterschied.
0	0,241	0,241	0,000
∓ 1	0,189	0,201	+ 0,012
∓ 2	0,090	0,116	+ 0,026
∓ 3	0,045	0,046	+ 0,001
∓ 4	0,019	0,013	— 0,006

Wenn Laurent aus der auffällig grossen Abweichung 0,026 bei dem Fehler 2 Anlass nimmt, die Genauigkeit des Gauss'schen Gesetzes in Zweifel zu ziehen, so ist dies weder durch die Art der Messungen noch durch den zur Gewinnung der Resultate eingeschlagenen Weg gerechtfertigt. Diese Abweichung sollte eher ein Anlass gewesen sein, ihre Ursache in den Beobachtungen zu suchen.

84. Man kann aus dem Gauss'schen Gesetze die mannigfachsten Konsequenzen in Betreff der Beobachtungsfehler und ihrer verschiedenen Kombinationen ziehen und, indem man dieselben mit der Erfahrung vergleicht, weitere Bestätigungen jenes Gesetzes gewinnen. Einige Beispiele dieser Art mögen noch angeführt werden.

Wenn man die Absolutwerte der Fehler einer Beobachtungsreihe in willkürlicher Weise paart, so ist der Durchschnittswert der grösseren Fehler in den Paaren gleich dem allgemeinen Durchschnittsfehler multipliziert mit $\sqrt{2}$. Denn die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fehler im Betrage $|\varepsilon|$ mit einem kleineren Fehler sich verbinde, ist

$$2\,\frac{2h}{\sqrt{\pi}}\,e^{-h^2\varepsilon^2}\,d\varepsilon\int_0^{\varepsilon}\frac{2h}{\sqrt{\pi}}\,e^{-h^2\varepsilon^2}\,d\varepsilon\,;$$

demnach ist der Durchschnittswert von $|\varepsilon|$

$$2\int_0^{\infty}\frac{2h}{\sqrt{\pi}}\,\varepsilon e^{-h^2\varepsilon^2}\,d\varepsilon\int_0^{\varepsilon}\frac{2h}{\sqrt{\pi}}\,e^{-h^2\varepsilon^2}\,d\varepsilon.$$

Durch partielle Integration, indem man

$$\int_0^\varepsilon \frac{2h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon = u, \qquad \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \varepsilon e^{-h^2\varepsilon^2} = dv$$

setzt, ergibt sich leicht, dass der Wert dieses Ausdrucks gleichkommt

$$\left\{ -\frac{2}{h\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon^2} \int_0^\varepsilon \frac{2h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon \right\}_0^\infty + \frac{4}{\pi} \int_0^\infty e^{-2h^2\varepsilon^2} d\varepsilon,$$

und da der erste Teil an beiden Grenzen verschwindet, so wird dies, wie behauptet worden, gleich

$$\frac{\sqrt{2}}{h\sqrt{\pi}} = \vartheta\sqrt{2}.$$

Ausser diesem hat Bertrand*) noch einen elementaren Beweis gegeben, der einer Berichtigung bedarf. Sind l_1, l_2 zwei Beobachtungen, ε_1, ε_2 ihre Fehler, so kann $\frac{l_1 + l_2}{2}$ wie eine Beobachtung mit dem Fehler $\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}$ und vom Präzisionsmaass $h\sqrt{2}$ angesehen werden, wenn h das Präzisionsmaass der einfachen Beobachtung ist. Demzufolge ist $\frac{1}{h\sqrt{2\pi}}$ der durchschnittliche Wert von $\left|\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}\right|$. Bezeichnet aber G den Absolutwert des grösseren, K den Absolutwert des kleineren von den beiden Fehlern ε_1, ε_2, so ist entweder

$$\left|\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}\right| = \frac{G+K}{2} \quad \text{oder} \quad \left|\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}\right| = \frac{G-K}{2},$$

jenachdem ε_1 und ε_2 gleich oder ungleich bezeichnet sind; jede dieser Annahmen hat die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$, mithin ist

$$\frac{1}{2} M\left(\frac{G+K}{2}\right) + \frac{1}{2} M\left(\frac{G-K}{2}\right) = \frac{1}{h\sqrt{2\pi}},$$

woraus sich unmittelbar ergibt $M(G) = \frac{\sqrt{2}}{h\sqrt{\pi}}$ wie oben.

Bemerkt man noch, dass $M\left(\frac{G+K}{2}\right)$ notwendig gleich sein müsse dem allgemeinen Durchschnitt $\frac{1}{h\sqrt{\pi}}$, so folgt, dass der durchschnittliche Wert der kleineren Fehler

*) Calc. des Probab., art. 156—157.

$$M(K) = \frac{1}{h\sqrt{\pi}}(2 - \sqrt{2}),$$

dass sich somit $M(G)$ zu $M(K)$, oder was dasselbe ist, die Summe der absoluten Werte der grösseren zur entsprechenden Summe der kleineren Fehler verhalte wie $(1 + \sqrt{2}) : 1$.

Dieses Verhältnis ist in der That durch die Erfahrung bestätigt worden. So erhielt Delaunay*) aus 33 Reihen von Schiessversuchen für dasselbe den Wert 2,41. Bertrand**) teilt die Ergebnisse von vier Beobachtungsreihen mit, welche im internationalen Bureau für Maasse und Gewichte ausgeführt worden sind, und von einer Reihe Bradley'scher Beobachtungen. Es ergab

die erste Reihe	(von 58 Beob.)	2,28
„ zweite „	(„ 90 „)	2,33
„ dritte „	(„ 54 „)	2,40
„ vierte „	(„ 77 „)	2,49
„ fünfte „	(„ 100 „)	2,47
	Mittel	2,39

Man kann ebenso nach dem mittleren Quadrate des grösseren von den beiden Fehlern eines Paares fragen und findet, dass er dem allgemeinen Durchschnitt der Fehlerquadrate multipliziert mit $1 + \frac{2}{\pi}$ gleichkommt. Denn es ist das mittlere Quadrat des grösseren Fehlers ausgedrückt durch

$$2\int_0^\infty \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \varepsilon^2 e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon \int_0^\varepsilon \frac{2h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon;$$

integriert man partiell in der Weise, dass man

$$\varepsilon \int_0^\varepsilon \frac{2h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon = u, \qquad \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \varepsilon e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon = dv$$

setzt, so kommt man zu dem Resultate

*) Compt. rend., CVI, pag. 515.

**) ibid., CV, pag. 1043.

$$\frac{4}{\pi}\int_0^\infty e^{-h^2\varepsilon^2}d\varepsilon\int_0^\varepsilon e^{-h^2\varepsilon^2}d\varepsilon+\frac{4}{\pi}\int_0^\infty \varepsilon e^{-2h^2\varepsilon^2}d\varepsilon;$$

hier hat der erste Teil den Wert*)

$$\frac{2}{\pi}\left\{\int_0^\infty e^{-h^2\varepsilon^2}d\varepsilon\right\}^2=\frac{1}{2h^2},$$

der zweite Teil den Wert $\frac{1}{\pi h^2}$; mithin ist das mittlere Quadrat des grösseren Fehlers thatsächlich gleich

$$\frac{1}{2h^2}\left(1+\frac{2}{\pi}\right)=\mu^2\left(1+\frac{2}{\pi}\right).$$

Vier mit den 40 Fehlerquadraten der Beobachtungsreihe des Artikels 82 ausgeführte derartige Versuche ergaben mir für das Verhältnis die Werte

1,523, 1,564, 1,671, 1,722,

deren Durchschnitt 1,620 mit dem theoretischen Werte $1+\frac{2}{\pi}=1,636\cdots$ gut übereinstimmt.

§ 10. Der kleinste und der grösste Fehler einer Beobachtungsreihe.

85. Denkt man sich die Fehler einer Beobachtungsreihe ohne Rücksicht auf das Vorzeichen in steigender Grösse geordnet, so bietet sich die zunächst vom theoretischen, aber auch vom praktischen Standpunkte interessante Frage dar nach dem mutmaasslichen Werte des kleinsten und des grössten unter ihnen.

Die einfache Überlegung führt zunächst zu der Erkenntnis, dass diese Werte von dem Grade der Genauigkeit, aber auch von dem Umfang der Beobachtungsreihe abhängen werden. Je mehr Beobachtungen man ausführt, desto näher

*) Man beachte, dass $e^{-h^2\varepsilon^2}d\varepsilon$ das Differential ist von $\int_0^\varepsilon e^{-h^2\varepsilon^2}d\varepsilon$.

wird einerseits der kleinste Fehler an die Null heranrücken, desto weiter wird andererseits der grösste Fehler sich von ihr entfernen: das Intervall der Fehler wird sich nach beiden Seiten hin ausdehnen.

Der wahrscheinliche Wert des kleinsten Fehlers lässt sich unter Voraussetzung einer grossen Anzahl von Beobachtungen näherungsweise leicht bestimmen*); schwieriger gestaltet sich die Frage nach dem Maximalfehler.

86. Die Wahrscheinlichkeit, dass einer bestimmten unter n Beobachtungen ein Fehler vom absoluten Betrage ε anhafte und dass dieser unter allen der kleinste sei, kommt gleich

$$\frac{2h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon \left\{1 - \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\varepsilon} e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon\right\}^{n-1};$$

folglich stellt sich die Wahrscheinlichkeit, dass ε der Absolutwert des kleinsten unter den n Beobachtungsfehlern überhaupt sei, unter die Form

$$n\{1 - \Theta(\varepsilon)\}^{n-1} d\{\Theta(\varepsilon)\},$$

wenn zur Abkürzung

$$\frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\varepsilon} e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon = \Theta(\varepsilon)$$

gesetzt wird. Hiernach ist der wahrscheinliche Wert des kleinsten Fehlers

$$\int_0^{\infty} n\varepsilon\{1 - \Theta(\varepsilon)\}^{n-1} d\{\Theta(\varepsilon)\};$$

partielle Integration gibt

$$-\left\{\varepsilon(1 - \Theta(\varepsilon))^n\right\}_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \{1 - \Theta(\varepsilon)\}^n d\varepsilon$$

und dies reduziert sich auf den zweiten Teil

---

*) Bertrand, Calc. des Probab., art. 167—169, und Compt. rend., CVI, pag. 786 flg.

(1) $$\int_0^\infty \{1 - \Theta(\varepsilon)\}^n d\varepsilon,$$

weil der erste Teil an beiden Grenzen verschwindet*).

Wenn ε klein ist, so unterscheidet sich $\Theta(\varepsilon)$ nur wenig von $h\varepsilon$**), während für grössere Werte von ε der Ausdruck $\{1 - \Theta(\varepsilon)\}^n$ so klein wird, dass er von da an nur sehr wenig zu dem Werte des Integrals beiträgt; man kann also an die Stelle des Integrationsgebietes 0 bis ∞ ein endliches 0 bis $\varkappa$ setzen, wo $\varkappa$ einen beliebigen endlichen Wert bezeichnet, und hat dann statt (1) näherungsweise

$$\int_0^\varkappa (1 - h\varepsilon)^n d\varepsilon = \frac{1 - (1 - h\varkappa)^{n+1}}{(n+1)h}.$$

Wird n als gross vorausgesetzt, so kann $\varkappa$ immer so gewählt werden, dass $(1 - h\varkappa)^{n+1}$ neben der Einheit verschwindet, so dass der wahrscheinliche Wert des kleinsten Fehlers näherungsweise gleichkommt

(2) $$\frac{1}{(n+1)h}$$

oder durch den mittleren Fehler einer Beobachtung ausgedrückt

(3) $$\frac{\mu\sqrt{2}}{n+1}.$$

Durch dasselbe Näherungsverfahren kann auch der wahrscheinliche Wert des zweitkleinsten Fehlers ermittelt werden. Die Wahrscheinlichkeit, dass der zweitkleinste unter n Be-

*) Um dies für die obere Grenze zu erkennen, beachte man, dass

$$1-\Theta(\varepsilon)=\int_\varepsilon^\infty \frac{2h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon = \frac{1}{h\sqrt{\pi}} \int_\infty^\varepsilon \frac{1}{\varepsilon} e^{-h^2\varepsilon^2} d(-h^2\varepsilon^2) < \frac{1}{h\varepsilon\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon^2}.$$

**) Denn $\Theta(\varepsilon) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{h\varepsilon} e^{-t^2} dt = h\varepsilon \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\eta^2}\right)$, wo $0 < \eta < \varepsilon$; ist ε klein, so ist der eingeklammerte Faktor von der Einheit sehr wenig verschieden. Auch die Tabelle I der Funktion $\Theta(t)$ bestätigt diese Schlussweise, indem sie zeigt, dass für kleine Werte von t sich $\Theta(t)$ nur wenig von t unterscheidet.

obachtungsfehlern absolut genommen gleich ε sei, ergibt sich durch ähnliche Schlüsse wie die oben angewandten und ist

$$n(n-1)\Theta(\varepsilon)\{1-\Theta(\varepsilon)\}^{n-2}d\{\Theta(\varepsilon)\};$$

demnach ist sein wahrscheinlicher Wert

$$(4) \qquad \int_0^\infty n(n-1)\varepsilon\Theta(\varepsilon)\{1-\Theta(\varepsilon)\}^{n-2}d\{\Theta(\varepsilon)\}.$$

Von dem Koeffizienten $n(n-1)$ abgesehen gibt partielle Integration

$$\left\{\varepsilon\left(\frac{\{1-\Theta(\varepsilon)\}^n}{n}-\frac{\{1-\Theta(\varepsilon)\}^{n-1}}{n-1}\right)\right\}_0^\infty$$

$$+\frac{1}{n-1}\int_0^\infty\{1-\Theta(\varepsilon)\}^{n-1}d\{\Theta(\varepsilon)\}-\frac{1}{n}\int_0^\infty\{1-\Theta(\varepsilon)\}^n d\{\Theta(\varepsilon)\}.$$

Der erste Teil verschwindet an beiden Grenzen; das Integral im zweiten Gliede hat obigem zufolge den Näherungswert $\frac{1}{nh}$, das Integral im dritten Gliede den Näherungswert $\frac{1}{(n+1)h}$. Trägt man dies in den Ausdruck (4) für den wahrscheinlichen Wert des zweitkleinsten Fehlers ein, so ergibt sich dieser gleich

$$(5) \qquad n(n-1)\left\{\frac{1}{n(n-1)h}-\frac{1}{n(n+1)h}\right\}=\frac{2}{(n+1)h},$$

also doppelt so gross als der wahrscheinliche Wert des kleinsten Fehlers.

In gleicher Weise ergäbe sich der wahrscheinliche Wert des drittkleinsten Fehlers als das Dreifache u. s. f., so lange die gebrauchten Abkürzungen zulässig sind.

Der scheinbare Widerspruch zwischen dem Resultat (5) und der Symmetrie des Fehlergesetzes, welcher zufolge man erwarten möchte, dass die beiden kleinsten Fehler dem absoluten Werte nach gleich sind, verschwindet, wenn man auf den Unterschied zwischen dem wahrscheinlichen Werte einer Grösse und demjenigen Werte achtet, welchen sie mutmaasslich annimmt. Bertrand erklärt diesen Unterschied an einem Beispiel. Peter und Paul sollen sich in eine Erbschaft teilen. Man weiss, dass der eine zwei Drittel, der

andere ein Drittel des Ganzen erhält, man weiss aber nicht welcher. Der wahrscheinliche Wert des Anteils für Peter ist $\frac{1}{2}$, jener des Anteils für Paul ebenfalls $\frac{1}{2}$. Dagegen ist der Wert, welchen der grössere Teil mutmaasslich (hier gewiss) annimmt, $\frac{2}{3}$.

Der wahrscheinliche Wert des kleinsten Fehlers (3) kann auch in der Form $\frac{\vartheta\sqrt{\pi}}{n+1}$ geschrieben werden, wenn ϑ den durchschnittlichen Fehler einer Beobachtung bezeichnet; der wahrscheinliche Wert des Fehlers im arithmetischen Mittel dagegen beträgt $\frac{\vartheta}{\sqrt{n}}$ (s. Art. 77); jener also ist von der Ordnung $\frac{1}{n}$, dieser von der Ordnung $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Wäre es daher möglich, unter den Beobachtungen die genauesten, dies Wort im gewöhnlichen Sprachgebrauch genommen, nämlich die mit dem kleinsten Fehler behafteten herauszufinden, so würden diese ein viel genaueres Resultat liefern als das arithmetische Mittel aus allen Beobachtungen es darstellt.

87. Dem Gauss'schen Fehlergesetz ist der Begriff des Maximalfehlers im mathematischen Sinne fremd, insofern es jedem noch so grossen Fehler eine von Null verschiedene Wahrscheinlichkeit zuschreibt. Nichtsdestoweniger gibt dieses Gesetz Mittel an die Hand, den grössten zu gewärtigenden Fehler in einer Beobachtungsreihe von bekannter Genauigkeit und Ausdehnung zu schätzen.

Es sei n die Anzahl der Beobachtungen, h das Präzisionsmaass, μ der mittlere Fehler einer Beobachtungsreihe. Die Wahrscheinlichkeit, dass der irgend einer Beobachtung anhaftende Fehler dem absoluten Betrage nach gleich oder grösser sei als a, ist dargestellt durch

$$\frac{2h}{\sqrt{\pi}}\int_a^\infty e^{-h^2\varepsilon^2}d\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{ah}^\infty e^{-t^2}dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{a}{\mu\sqrt{2}}}^\infty e^{-t^2}dt,$$

und die wahrscheinlichste Anzahl so gearteter Fehler ist

$$n \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{a}{\mu\sqrt{2}}}^{\infty} e^{-t^2} dt.$$

Fällt diese grösser als die Einheit aus, so ist in der Reihe mindestens ein oder auch mehrere Fehler grösser als a zu erwarten; fällt sie kleiner als die Einheit aus, so ist kein Fehler zu erwarten, der grösser oder gleich a wäre; der mutmaassliche grösste Fehler M wird also durch die Gleichung

$$n \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{M}{\mu\sqrt{2}}}^{\infty} e^{-t^2} dt = 1 \tag{6}$$

charakterisiert sein. Die Auflösung dieser Gleichung nach M lässt sich mittels der Tafel I der Funktion $\Theta(t)$ bewerkstelligen; man kann nämlich die Gleichung (6) mit der vorübergehenden Abkürzung $\frac{M}{\mu\sqrt{2}} = t$ in der Form

$$n\left(1 - \Theta(t)\right) = 1$$

schreiben, aus welcher

$$\Theta(t) = \frac{n-1}{n} \tag{7}$$

folgt. Hat man den dem gegebenen n zugehörigen Wert t aus der Tafel entnommen, so findet sich das Verhältnis des Maximalfehlers zum mittleren Fehler

$$\frac{M}{\mu} = t\sqrt{2}.$$

Auf diesem Wege ist die beifolgende kleine Tabelle konstruiert worden.

n	$\frac{M}{\mu}$
20	1,95
40	2,24
60	2,39
80	2,49
100	2,58
500	3,09
1 000	3,39

n	$\frac{M}{\mu}$
5 000	3,72
10 000	3,89
50 000	4,26
100 000	4,41
500 000	4,74
1 000 000	4,88
5 000 000	5,19
10 000 000	5,33

Dieselbe ist zunächst dadurch belehrend, dass sie zeigt, wie ausserordentlich langsam der Maximalfehler mit der Anzahl der Beobachtungen zunimmt. Während er bei etwa 20 Beobachtungen das Doppelte des mittleren Fehlers beträgt, erreicht er erst bei ca. 400 Beobachtungen das Dreifache, bei 16 000 das Vierfache, bei 2 000 000 das Fünffache und erst bei 500 000 000 das Sechsfache desselben.

Für kleine Anzahlen von Beobachtungen lässt aber die Formel (7) keine Schlüsse zu; denn das Bernoulli'sche Theorem, auf das sie sich gründet, setzt grosse Zahlen voraus. Mithin zeigt die Tabelle, wenn man $n = 20$ als die untere noch zulässige Grenze und $n = 1\,000\,000$ als den höchsten Wert gelten lässt, welcher praktisch etwa noch vorkommen könnte, dass der Maximalfehler sich zwischen den Grenzen 2μ und 5μ bewegt. Da die Beobachtungsdifferenzen zugleich mit den Beobachtungsfehlern das Gauss-sche Gesetz befolgen und die mittlere Beobachtungsdifferenz $D = \mu\sqrt{2}$ ist (s. Art. 73), so sind $2\mu\sqrt{2}$ und $5\mu\sqrt{2}$ oder rund 3μ und 7μ als die Grenzen anzusehen, zwischen welche sich die maximale Beobachtungsdifferenz je nach der Anzahl der Beobachtungen stellen wird*).

Die Erfahrung stimmt mit den Ergebnissen der Theorie im grossen Ganzen überein. Bei den in Artikel 80 vorgeführten von Bessel untersuchten Beobachtungsreihen ergibt sich auf Grund der obigen Tabelle, respektive der Formel (7)

*) Vgl. Helmert, Zeitschr. f. Vermessungswesen, VI. pag. 143 flg.

im Falle	a)	b)	c)	d)
$M =$	$4\overset{''}{,}87$	$0\overset{''}{,}67$	$1\overset{''}{,}24$	$3\overset{''}{,}37$

in genügender Übereinstimmung mit den dort angegebenen Grenzen der beobachteten Fehler.

Für die beiden umfangreichen Beobachtungsreihen des Artikels 81 findet man

im Falle	a)	b)
$M =$	$44\overset{''}{,}63$	$58\overset{''}{,}41$,

während dort

$$46\overset{''}{,}35 \qquad 56\overset{''}{,}39$$

als die Grenzen der beobachteten Fehler angegeben sind.

Der Beobachtungsreihe des Artikels 82 entspricht $M = 2{,}04$; es fällt nur einer von den 40 Fehlern über diese Grenze hinaus. Häufig wird die Wahrnehmung gemacht, dass die grossen Fehler etwas zahlreicher auftreten, als es der Theorie entsprechen würde.

88. Jordan*) suchte die Frage des Maximalfehlers dadurch zu lösen, dass er an die Stelle der Exponentialfunktion eine gerade rationale ganze Funktion substituierte und ihre Koeffizienten auf Grund der Forderung bestimmte, dass die Kurve, welche die geometrische Darstellung der Funktion bildet, der Abszissenaxe in endlicher Entfernung — d. i. in der Entfernung M — berührend in erster oder zweiter Ordnung sich anschmiege und die notwendige Bedingung

$$2\int_0^M \varphi(\varepsilon)\,d\varepsilon = 1$$

erfülle. Bei einer Berührung erster Ordnung ergibt sich

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{15}{16\,M}\left(1 - 2\left(\frac{\varepsilon}{M}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon}{M}\right)^4\right)$$

und daraus $M = 2{,}6458\,\mu$; und bei einer Berührung zweiter Ordnung die von Helmert (l. c.) zuerst aufgestellte Gleichung

*) Zeitschr. f. Vermessungswesen, VI, pag. 35 flg. und Handbuch der Vermessungskunde, 3. Aufl., I, pag. 288 flg.

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{35}{32M}\left(1 - 3\left(\frac{\varepsilon}{M}\right)^2 + 3\left(\frac{\varepsilon}{M}\right)^4 - \left(\frac{\varepsilon}{M}\right)^6\right),$$

welche genau $M = 3\mu$ gibt. Vergleichungen dieser beiden Formeln mit der Erfahrung, wie sie von Jordan angestellt wurden, gaben zwar eine im allgemeinen genügende Übereinstimmung, werden jedoch von dem Exponentialgesetz hierin entschieden übertroffen. Jordan zog nun den Schluss, dass man 3μ als Maximalfehler schlechtweg festsetzen könne*). Unsere Tabelle zeigt, dass diese Angabe für Fehlerreihen von etwa 400 Beobachtungen zutrifft.

Dass dieser Weg zur Lösung der obschwebenden Frage vom theoretischen Standpunkte nicht geeignet ist, hat Helmert**) hervorgehoben, indem er zeigte, dass jene algebraischen Funktionen „nur Glieder in einer Reihe von Näherungsformeln sind, die sich dem Gauss'schen Gesetze mehr und mehr anschliessen, aber den Maximalfehler gleich einem immer grösseren Vielfachen des mittleren Fehlers ergeben". Er hat auch den richtigen Standpunkt gekennzeichnet, dass die Frage des Maximalfehlers nur mit Rücksicht auf die Anzahl der Beobachtungen behandelt werden dürfe.

89. Schwieriger gestaltet sich die Frage nach dem Maximalfehler einer einzelnen Beobachtung. Zu einer theoretisch begründeten Festsetzung desselben bietet das Fehlergesetz keinen Anhalt, so dass es hier ohne Willkür nicht abgeht.

Die obige Tabelle zeigt, dass etwa unter 400 Beobachtungen eine vorkommt, welche den Fehler 3μ aufweist; wird also aus 400 derlei Beobachtungen eine willkürlich herausgegriffen, so ist $\frac{1}{400}$ die Wahrscheinlichkeit, dass ihr der Fehler 3μ anhafte. Erachtet man eine numerische Wahrscheinlichkeit im Betrage von $\frac{1}{400}$ für genügend klein, um

---

*) Der Betrag 3μ ist als grösster im arithmetischen Mittel zu befürchtender Fehler bezeichnet worden von Fourier mit der Begründung, dass man mehr als 50 000 gegen 1 wetten könne, er werde nicht überschritten. Bull. des scienc. mathém., II, pag. 88 flg.

**) l. c. pag. 131 flg.

das Eintreffen des Ereignisses, welchem sie zukommt, als an der Grenze des Gewöhnlichen zu erklären, so kann man — und dies thut Helmert — 3μ als den Maximalfehler einer Beobachtung ansehen. Aber es liegt ein wesentlicher Unterschied zwischen dieser Auffassung und der früheren: wenn eine Reihe von 400 Beobachtungen ausgeführt worden ist, so hat man unter normalen Verhältnissen zu erwarten, dass in der steigend geordneten Fehlerreihe der grösste Fehler etwa 3μ sein werde; ist dagegen nur eine Beobachtung gemacht worden, so wird ihr Fehler nur bei dem Zusammentreffen sehr ungünstiger, wenn auch nicht ungewöhnlicher, Umstände den Betrag 3μ erreichen.

§ 11. **Ausscheidung widersprechender Beobachtungen.**

90. Mit der Frage des Maximalfehlers hängt die weit schwierigere der Ausscheidung widersprechender oder zweifelhafter Beobachtungen zusammen.

Wenn ein Beobachter eine Reihe von Messungen, die er ausgeführt, für gleichmässig gut erklärt, so drückt er damit nur aus, dass er sich während der Beobachtungen keines Umstandes bewusst geworden ist, welcher ihn veranlassen könnte eine Beobachtung der andern vorzuziehen; der objektive Sachverhalt aber wird diesem subjektiven Dafürhalten nie ganz entsprechen. Es werden bei einzelnen Beobachtungen Ursachen zur Wirkung kommen, welche verschieden sind von denjenigen, denen die Entstehung der Beobachtungsfehler im allgemeinen bei dem betreffenden Vorgange zugeschrieben wird. In der That zeigt fast jede grössere Beobachtungsreihe einzelne Resultate, welche durch ihre auffällige Abweichung von den andern den gegründeten Verdacht erwecken, dass sie unter aussergewöhnlichen Verhältnissen zu Stande gekommen sind. In manchen Fällen wird dies mit einer an Gewissheit streifenden Wahrscheinlichkeit angenommen werden dürfen. Alle Versuche jedoch, ein allgemein giltiges, auf wahrscheinlichkeitstheoretischen Grundlagen ruhendes Merkmal dafür anzugeben, ob eine Beobachtung von störenden Fehlerursachen beeinflusst war und daher auszuschliessen ist, sind bisher ohne befriedigendes Resultat geblieben.

Aber auch diejenigen Fehlerursachen, welche als die gewöhnlich wirkenden anzusehen sind, werden es in der Regel nicht beständig in gleichem Grade sein, so dass auch von diesem Gesichtspunkte nicht alle Beobachtungen dasselbe Vertrauen verdienen.

Es wird nicht ohne Nutzen und Interesse sein, einige der auf Verschärfung der Resultate durch Ausscheidung zweifelhafter Beobachtungen gerichteten Versuche kennen zu lernen und in ihren theoretischen Grundlagen zu verfolgen.

91. Es unterliegt keinem Zweifel, dass die Ausscheidung solcher Beobachtungen, deren Abweichung vom arithmetischen Mittel dem absoluten Betrage nach eine gewisse Grenze überschreitet und die vermutlich oder sogar höchst wahrscheinlich minder gut sind, die Genauigkeit des Resultates erhöhen müsste, und zwar in um so höherem Grade, je enger man jene Grenze zöge. Eine von Bertrand*) ausgeführte Untersuchung bestätigt dies und gestattet den Grad der Verschärfung zu schätzen.

Eine Grösse ist n mal gemessen worden; man hat aus den Beobachtungsergebnissen $l_1, l_2, \ldots l_n$ das arithmetische Mittel x, aus ihren Abweichungen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ von x das Präzisionsmaass h und den mittleren Fehler des arithmetischen Mittels, dessen Quadrat (annähernd) gleich ist $\frac{[\lambda\lambda]}{n^2}$, abgeleitet; in der Voraussetzung, dass n gross und die Beobachtungen sorgfältig ausgeführt sind, darf man erwarten, dass x nur sehr wenig sich von dem wahren Werte der gemessenen Grösse unterscheiden werde, und die λ wie wahre Fehler ansehen. Die Wahrscheinlichkeit eines Betrages λ kann, weil kein Grund für die Annahme störender Ursachen vorliegt, mit

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\lambda^2} d\lambda$$

angesetzt werden.

Man stelle nun die Fehlergrenze ϖ derart fest, dass die Wahrscheinlichkeit, ein Fehler sei absolut genommen kleiner als ϖ, einem bestimmten, willkürlich festgesetzten Werte p

*) Calc. des Probab., art. 166 und Compt. rend., CVI, pag. 701 flg.

gleichkommt — ϖ ergibt sich dann durch Auflösung der Gleichung

$$(1) \qquad \Theta(\varpi h) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\varpi h} e^{-t^2} dt = p$$

— und unterdrücke alle Beobachtungen, deren Fehler ϖ übersteigt*). Die Anzahl m der übrig bleibenden Beobachtungen $l_1', l_2', \ldots l_m'$ wird dem Bernoulli'schen Satze zufolge nur wenig von np verschieden sein, und wir setzen im Folgenden geradezu

$$m = np.$$

Mit diesen Beobachtungen möge nun ebenso verfahren werden wie mit den ursprünglichen; man bestimmt ihr arithmetisches Mittel x', bildet ihre Abweichungen λ' von diesem und benützt sie zur Bestimmung des mittleren Fehlers von x', dessen Quadrat gleichkommt $\frac{[\lambda' \lambda']}{m^2}$.

Hätte man alle Beobachtungen beibehalten, so wäre $\frac{1}{2h^2}$ das Quadrat des mittleren Fehlers einer Beobachtung und somit

$$(2) \qquad \frac{1}{2nh^2}$$

das Quadrat des mittleren Fehlers von x.

Hat man jedoch nur die m ausgewählten Beobachtungen herangezogen, so ist das Quadrat des mittleren Fehlers einer Beobachtung dargestellt durch

$$\frac{2h}{p\sqrt{\pi}} \int_0^{\varpi} \lambda^2 e^{-h^2\lambda^2} d\lambda;$$

---

*) Man denke sich, sagt Bertrand, eine Person von seltener Geschicklichkeit, welche ohne selbst zu beobachten alle Vorgänge der Messung aufmerksam überwacht und, auf das genaueste vertraut mit der Beobachtungsmethode, den Unvollkommenheiten des Instruments und den Schwächen des Beobachters, ihr Urteil über jede einzelne Beobachtung mit dem einzigen Worte „gut“ oder „schlecht“ ausdrückt. Es ist klar, dass die Unterdrückung der als schlecht bezeichneten Beobachtungen die Zuverlässigkeit der Resultate um so mehr erhöhen wird, je mehr Beobachtungen beseitigt worden sind, oder besser gesagt, je rigoroser die überwachende Person zu Werke ging.

denn die Anzahl der einem Fehler zwischen λ und $\lambda + d\lambda$ günstigen Fälle ist dieselbe geblieben, dagegen die Anzahl der möglichen Fälle durch die Auswahl mit p multipliziert worden; darum erscheint p im Nenner. Durch faktorenweise Integration erhält man

$$\frac{2h}{p\sqrt{\pi}}\left\{\frac{\lambda}{2h^2}e^{-h^2\lambda^2}\right\}_{\varpi}^{0} + \frac{1}{2ph^2}\frac{2h}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\varpi} e^{-h^2\lambda^2}\,d\lambda$$

und dies gibt mit Rücksicht auf (1)

$$\frac{1}{2h^2}\left(1 - \frac{2h\varpi e^{-h^2\varpi^2}}{p\sqrt{\pi}}\right).$$

Durch Division mit $m = np$ erhält man hieraus das Quadrat des mittleren Fehlers in x', und dasselbe kann, wenn man für p den aus (1) ersichtlichen Ausdruck einsetzt, in der Form

$$\frac{1}{2nh^2}\left\{\frac{\Theta(\varpi h) - \frac{2h\varpi}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2\varpi^2}}{\Theta(\varpi h)^2}\right\} \tag{3}$$

geschrieben werden.

Die Vergleichung von (2) mit (3) zeigt nun, dass der mittlere Fehler in x' kleiner ist als der in x, so lange der eingeklammerte Ausdruck in (3) ein echter Bruch ist. Dies ist aber immer der Fall; denn jener Ausdruck, welcher mit $\varpi h = t$

$$\frac{\Theta(t) - \frac{2t}{\sqrt{\pi}}e^{-t^2}}{\Theta(t)^2}$$

lautet, verschwindet für $t = 0$, wächst mit t beständig und nähert sich der Grenze 1, wenn t unendlich wird. Einige Werte genügen, um seinen Verlauf anzudeuten.

$t =$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
Wert des Ausdrucks $=$	0,091	0,133	0,198	0,246	0,293	0,339	0,379	0,416

Es darf nicht übersehen werden, dass die Anwendung der Formel voraussetzen würde, dass n und np grosse Zahlen seien, weil nur dann zu erwarten ist, dass die Differenz $m - np$ klein sein werde.

Die untere Grenze ϖ für die Fehler der auszuscheidenden Beobachtungen wäre hier dem Ermessen des Beobachters anheimgegeben; zur Ausschliessung würde er aber gewiss nur dann schreiten, wenn innere Gründe mit grosser Wahrscheinlichkeit für die Minderwertigkeit der zweifelhaften Beobachtungen sich zeigten.

92. B. Peirce*) hat die Grenze ϖ durch wahrscheinlichkeitstheoretische Betrachtungen festzustellen versucht und ein Kriterium aufgestellt, mittels dessen darüber entschieden werden soll, ob eine zweifelhafte Beobachtung der Wirkung störender Ursachen zuzuschreiben und daher auszuscheiden ist oder nicht. Seine Schlüsse sind im Wesentlichen die folgenden.

Für eine Reihe von n Beobachtungen ist die Fehlergrenze ϖ der auszuscheidenden Beobachtungen zu bestimmen, vorausgesetzt dass es solcher Beobachtungen gerade ν gebe.

Das Prinzip zur Lösung dieses Problems soll darin bestehen, dass die zweifelhaften Beobachtungen dann ausgeschlossen werden, wenn die Wahrscheinlichkeit des Fehlersystems, welches sich ergibt, wenn man sie beibehält, kleiner ist als die Wahrscheinlichkeit des Fehlersystems, welches aus ihrer Verwerfung hervorgeht, multipliziert mit der Wahrscheinlichkeit, gerade so viele und nicht mehr abnormale Beobachtungen zu machen.

Es seien also, in Ausführung dieses Gedankens, $l_1, l_2, \ldots l_n$ die Beobachtungen, n an der Zahl, ν die Anzahl der zur Ausscheidung proponierten, daher $m = n - \nu$ die Anzahl der im Falle der erfolgten Ausscheidung zurückbleibenden; $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ das System der Fehler, wenn keine Beobachtung ausgeschlossen wird, $\lambda_1', \lambda_2', \ldots \lambda_m'$ das Fehlersystem im Falle der Ausscheidung; μ der mittlere Fehler einer Beobachtung im ersten, μ' im zweiten Falle; $\varphi(\lambda) = \frac{1}{\mu\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\lambda^2}{2\mu^2}}$ das Gesetz der Fehler im ersten, $\varphi'(\lambda) = \frac{1}{\mu'\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\lambda^2}{2\mu'^2}}$ das analoge Gesetz

---

*) Gould's Astronomical Journal, II, Nr. 45. Vgl. auch Chauvenet, Manual of spheric. and pract. Astronomy, II, pag. 558 flg.

im zweiten Falle; $\frac{\varpi}{\mu} = \varkappa$ das Verhältnis der Fehlergrenze zum mittleren Fehler; endlich y die als unbekannt anzusehende Wahrscheinlichkeit, dass solch eine zweifelhafte Beobachtung auf Rechnung ihrer Grösse ausgeschieden werde, $y' = 1 - y$ die Wahrscheinlichkeit, dass sie nicht von abnormalem Charakter sei, welcher ihre Ausscheidung begründen würde.

Die Wahrscheinlichkeit, der numerische Wert des Fehlers einer Beobachtung überschreite die Grenze ϖ, ist

$$\frac{2}{\mu\sqrt{2\pi}}\int_{\varpi}^{\infty} e^{-\frac{\lambda^2}{2\mu^2}}\,d\lambda,$$

oder wenn man $\frac{\lambda^2}{2\mu^2} = t^2$ setzt,

$$\psi(\varkappa) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{\varkappa}{\sqrt{2}}}^{\infty} e^{-t^2}\,dt = 1 - \Theta\left(\frac{\varkappa}{\sqrt{2}}\right). \tag{1}$$

Zur Aufstellung der Wahrscheinlichkeit des ersten Fehlersystems bemerkt Peirce, dass sie mit Berücksichtigung der Bedingung, dass ν Beobachtungen die Fehlergrenze $\varkappa\mu$ überschreiten, und daher so geschehen müsse, dass diese Beobachtungen, weil sie im zweiten System ausgeschieden sind, nicht nach ihrem wirklichen Betrage, sondern nur insoweit sie die Grenze $\varkappa\mu$ überschreiten, in Rechnung kommen. Hiernach sei diese Wahrscheinlichkeit (proportional)

$$P = \varphi(\lambda_1)\varphi(\lambda_2)\cdots\varphi(\lambda_n)\left\{\frac{\psi(\varkappa)}{\varphi(\varkappa\mu)}\right\}^{\nu} = \frac{\psi(\varkappa)^{\nu}}{\mu^m(2\pi)^{\frac{m}{2}}}\, e^{-\frac{[\lambda\lambda] - \nu\varkappa^2\mu^2}{2\mu^2}},$$

und dies kann vermöge $[\lambda\lambda] = (n-1)\mu^2$ auf die Form

$$P = \frac{\psi(\varkappa)^{\nu}}{\mu^m(2\pi)^{\frac{m}{2}}}\, e^{-\frac{1}{2}(n-1-\nu\varkappa^2)} \tag{2}$$

gebracht werden.

Das Produkt der Wahrscheinlichkeit des zweiten Fehl systems mit der Wahrscheinlichkeit, dass gerade ν Beoba tungen ausgeschieden werden, ist (proportional)

$$P' = y^\nu y'^m \varphi'(\lambda_1')\varphi'(\lambda_2') \cdots \varphi'(\lambda'_m) = \frac{y^\nu y'^m}{\mu'^m (2\pi)^{\frac{m}{2}}} e^{-\frac{[\lambda'\lambda']}{2\mu'^2}},$$

oder wegen $[\lambda'\lambda'] = (m-1)\mu'^2$

$$P' = \frac{y^\nu y'^m}{\mu'^m (2\pi)^{\frac{m}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(m-1)}. \tag{3}$$

Zur Ausscheidung der ν proponierten Beobachtungen ist man dem aufgestellten Prinzip zufolge berechtigt, wenn

$$P < P',$$

d. i. wenn

$$\left(\frac{\mu'}{\mu}\right)^m e^{\frac{1}{2}\nu(x^2-1)} \psi(x)^\nu < y^\nu y'^m. \tag{4}$$

Der Wert von y ist so zu bestimmen, dass P' ein Maximum werde; $y^\nu y'^m = y^\nu (1-y)^m$ aber erreicht seinen grössten Wert für

$$y = \frac{\nu}{n}, \qquad y' = \frac{m}{n};$$

setzt man diesen Maximalwert

$$\frac{\nu^\nu m^m}{n^n} = T^\nu \tag{5}$$

und

$$e^{\frac{1}{2}(x^2-1)} \psi(x) = R, \tag{6}$$

so ergibt sich auf Grund von (4) die zur Bestimmung von x führende Gleichung und damit auch das Kriterium

$$\left(\frac{\mu'}{\mu}\right)^m R^\nu = T^\nu. \tag{7}$$

Für das Verhältnis $\frac{\mu'}{\mu}$ lässt sich ein Näherungswert bestimmen, wenn man bemerkt, dass $[\lambda'\lambda']$ sich von $[\lambda\lambda]$ um die Summe der Fehlerquadrate der ausgeschiedenen Beobachtungen unterscheide; dies gibt nämlich die allerdings nur angenähert richtige Gleichung

$$(n-1)\mu^2 - (m-1)\mu'^2 = \nu x^2 \mu^2,$$

aus welcher sich

$$\left(\frac{\mu'}{\mu}\right)^2 = \frac{n-1-\nu x^2}{m-1}$$

berechnet; hiermit wird aus (7)

$$\frac{n-1-\nu x^2}{m-1} = \left(\frac{T}{R}\right)^{\frac{2\nu}{m}}$$

und daraus folgt, wenn man zur Abkürzung

(8) $$\left(\frac{T}{R}\right)^{\frac{2\nu}{m}} = \beta^2$$

setzt, schliesslich

(9) $$x^2 - 1 = \frac{m-1}{\nu}(1-\beta^2).$$

Zur Erleichterung der Rechnung sind von Gould*) und von Chauvenet**) Tafeln für die Grössen T und R, respektive für deren Logarithmen, geordnet nach den entsprechenden Argumenten n, ν, beziehungsweise x berechnet worden, was darauf schliessen lässt, dass das Kriterium seitens amerikanischer Astronomen thatsächlich benutzt zu werden pflegt***). Durch successive Approximation kann mit Hilfe der Gleichungen (8), (9), indem man mit einem angenommenen Werte von x^2 beginnt, der definitive Wert dieser Grösse gefunden werden.

Gould hat auch eine Tafel der Werte x^2 für verschiedene n und ν aufgestellt, von welcher hier ein Bruchteil folgen möge.

Tafel der Werte von x^2.

n	ν				
	1	2	3	4	5
3	1,480				
4	1,912	1,163			
5	2,278	1,439			
6	2,592	1,687	1,208		
7	2,866	1,910	1,409	1,045	
8	3,109	2,112	1,589	1,229	
9	3,327	2,295	1,753	1,388	1,091
10	3,526	2,464	1,904	1,531	1,242

*) Gould's Astron. Journ., IV, Nr. 83.

**) l. c.

***) Dies bestätigen auch einige Bemerkungen Winlock's i[illegible] Verteidigung des Peirce'schen Kriteriums (Astron. Journ., IV, N[illegible] welche er dem abfälligen Urteil Airy's (ibid., Nr. 90) entg[illegible] gestellt hat.

n	ν				
	1	2	3	4	5
11	3,707	2,621	2,045	1,662	1,373
12	3,875	2,766	2,176	1,785	1,492
13	4,029	2,902	2,299	1,901	1,604
14	4,173	3,030	2,416	2,009	1,709
15	4,309	3,151	2,526	2,111	1,807
16	4,436	3,264	2,630	2,207	1,898
17	4,555	3,371	2,729	2,300	1,985
18	4,668	3,475	2,824	2,389	2,069
19	4,776	3,571	2,914	2,474	2,150
20	4,878	3,664	3,001	2,556	2,227
21	4,975	3,755	3,084	2,634	2,301
22	5,068	3,840	3,164	2,709	2,373
23	5,157	3,923	3,240	2,782	2,442
24	5,242	4,002	3,315	2,852	2,509
25	5,324	4,078	3,387	2,920	2,573
26	5,403	4,151	3,456	2,986	2,636
27	5,479	4,222	3,523	3,049	2,697
28	5,552	4,291	3,588	3,111	2,756
29	5,622	4,358	3,651	3,171	2,813
30	5,690	4,422	3,712	3,229	2,869
31	5,756	4,484	3,772	3,285	2,923
32	5,820	4,545	3,829	3,340	2,976
33	5,882	4,604	3,884	3,394	3,028
34	5,942	4,661	3,939	3,446	3,078
35	6,001	4,717	3,992	3,497	3,127
36	6,058	4,771	4,044	3,547	3,174
37	6,113	4,823	4,095	3,595	3,221
38	6,167	4,874	4,144	3,643	3,267
39	6,219	4,925	4,192	3,689	3,312
40	6,270	4,974	4,239	3,734	3,356

Hiernach ist, wenn es sich um die Ausscheidung einer
eifelhaften unter 30 Beobachtungen handelt, $\varpi^2 = 5{,}690\mu^2$,

also die Fehlergrenze $\varpi = 2{,}39\,\mu$, dagegen bei drei zur Ausscheidung proponierten Beobachtungen $\varpi^2 = 3{,}712\,\mu^2$ und $\varpi = 1{,}93\,\mu$.

Auf die im Artikel 82 besprochene Beobachtungsreihe angewendet hat man, wenn es sich zunächst um Ausscheidung einer Beobachtung handelt,

$$n = 40, \quad \nu = 1, \quad \text{also} \quad x^2 = 6{,}270;$$

wegen $\mu^2 = 0{,}8317$ ist demnach $\varpi = 2{,}28$; da nun die mit dem grössten Fehler 2,42 behaftete Beobachtung 6,35 diese Grenze überschreitet, so wäre sie auszuscheiden. — Wollte man zwei Beobachtungen verwerfen, nämlich die beiden vom arithmetischen Mittel am meisten abweichenden 6,35 und 2,28, so wäre

$$n = 40, \quad \nu = 2, \quad \text{also} \quad x^2 = 4{,}974$$

und die Fehlergrenze $\varpi = 2{,}03$; da aber die erwähnten Beobachtungen um 2,42, 1,65 vom arithmetischen Mittel abweichen, so wäre nur die erste, die zweite nicht zu verwerfen.

Auf diese Weise kann in jedem Falle durch schrittweisen Vorgang die Anzahl der auszuscheidenden Beobachtungen festgestellt werden.

93. Im Anschlusse an Peirce's Kriterium und um das Vertrauen in dasselbe zu erhöhen, gab Chauvenet*) eine einfache Regel behufs Ausscheidung einer zweifelhaften Beobachtung aus einer Reihe direkter Beobachtungen. Dieselbe schliesst sich eng an das Verfahren an, welches in Art. 87 zur Schätzung des Maximalfehlers eingeschlagen worden ist.

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fehler dem absoluten Betrage nach grösser sei als ϖ, ist

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\varpi}{\mu\sqrt{2}}}^{\infty} e^{-t^2}\, dt$$

und in n Beobachtungen hat man solcher Fehler

*) l. c., pag. 564 flg.

$$n \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\frac{\varpi}{\mu\sqrt{2}}}^{\infty} e^{-t^2} dt$$

zu erwarten. Beträgt diese Zahl weniger als $\frac{1}{2}$, „so hat ein Fehler vom Betrage ϖ eine grössere Wahrscheinlichkeit gegen als für sich“ und ist daher auszuscheiden. Auf Grund dieser Festsetzung ergeben sich nach dem in Art. 87 befolgten Vorgange zur Bestimmung der Fehlergrenze $\varpi = \varkappa\mu$ für die Ausschliessung einer Beobachtung die Gleichungen

$$\Theta(t) = \frac{2n-1}{2n}$$

$$\varkappa = t\sqrt{2},$$

deren erste mittels der Tafel I am Ende des Buches gelöst wird.

Die Regel kann auch zur successiven Ausscheidung von zwei und mehreren Beobachtungen verwendet werden.

Um den Anschluss an das Kriterium von Peirce zu zeigen, möge die folgende Zusammenstellung einiger Werte von $\varkappa^2$ dienen.

n	$\varkappa^2$ Peirce	Chauvenet	Differenz
10	3,526	3,840	— 0,314
20	4,878	5,024	— 0,146
30	5,690	5,728	— 0,038
40	6,270	6,236	+ 0,034
50	6,720	6,632	+ 0,088
60	7,090	6,956	+ 0,134

94. Stone*) ist, um ein Kriterium für die Ausscheidung zu gewinnen, von der unbestreitbaren Thatsache ausgegangen, dass beim Anstellen und Verzeichnen von Beobachtungen auch dem geübtesten und gewissenhaftesten Beobachter Irrungen unterlaufen, deren er sich bei dem ganzen Vorgange nicht bewusst wird. Beobachtungen aber, welche

*) Monthly Notices of the R. Astron. Soc., XXVIII, pag. 165 flg.

unter dem Einflusse von Irrungen zu Stande gekommen sind, sollen ausgeschieden werden. Nun gebe es für jede Gattung von Beobachtungen und jeden Beobachter eine Zahl N, so dass im grossen Durchschnitt unter N Beobachtungen einmal ein Irrtum geschieht. Setzt man nun die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fehler dem absoluten Betrage nach grösser sei als ϖ, gleich $\frac{1}{N}$, so betrachtet Stone die Gleichung

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{\varpi}{\mu\sqrt{2}}}^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{1}{N}$$

als diejenige, welche die Grenze der Ausscheidung feststelle; denn jeder Fehler grösser als ϖ könne mit grösserer Wahrscheinlichkeit einem Irrtum als den gewöhnlich wirkenden Ursachen zugeschrieben werden.

Die Umformung der obigen Gleichung führt zu den Relationen

$$\Theta(t) = \frac{N-1}{N}$$

$$\varpi = \mu t\sqrt{2},$$

welche mit jenen des Art. 87 übereinstimmen, wenn man N für n setzt. Die dort angegebene Tabelle gilt also auch im gegenwärtigen Falle.

Wenn man sich damit zufrieden gibt oder wenn man dies auf Grund wiederholter Erprobung geradezu annehmen darf, dass ein Beobachter unter 1000 Fällen einmal irrt, dann sollen alle Beobachtungen, deren Fehler $3{,}39\mu$ übersteigt, verworfen werden.

Nun ist, wie Stone bemerkt, allerdings kein Mittel vorhanden, für eine Gattung von Beobachtungen und einen bestimmten Beobachter die Zahl N festzusetzen; aber bei der ausserordentlich langsamen Änderung, welche $\frac{\varpi}{\mu}$ mit wachsendem N erfährt, genüge ein roher Näherungswert; er scheint $N = 500$ für denjenigen Wert zu halten, welcher gewöhnlichen Verhältnissen entsprechen dürfte, und findet so, dass

einem wahrsch. Fehler einer Beob. von	als Grenze der Ausschliessung
0,12	0,55
0,48	2,2
0,95	4,4
1,91	8,8
3,82	17,6

(beiläufig $\varpi = 4{,}6r$) entspreche.

In wesentlichem Gegensatze zu den beiden vorgenannten Kriterien hängt hier die Grenze der Ausscheidung nicht von der Anzahl n der Beobachtungen, sondern von einer für eine Gattung von Beobachtungen und einen Beobachter fest bleibenden Zahl N ab, für deren Bestimmung sich überdies kein Anhalt bietet.

Gegen Stone's Verfahren lässt sich ein gewichtiger Einwand erheben. Gesetzt, man hätte für einen Beobachter und eine bestimmte Gattung von Beobachtungen $N = 100$ angesetzt; dann wäre jede Beobachtung, deren Abweichung $2{,}58\mu$ übersteigt, zu verwerfen. Hat aber der betreffende Beobachter 300 solcher Beobachtungen ausgeführt, so werden die aus den gewöhnlichen Ursachen entspringenden Fehler mutmaasslich bis zur Grenze $2{,}94\mu$ reichen; es würden also nach der obigen Regel Beobachtungen verworfen werden, bei welchen kein Grund für die Annahme aussergewöhnlicher Ursachen vorliegt.

95. Angesichts der Thatsache, dass keine der Regeln für die Ausscheidung scheinbar anormaler Beobachtungen frei ist von willkürlichen Annahmen, muss die Frage aufgeworfen werden, ob es sich überhaupt empfiehlt, auf diesem Wege eine Verschärfung der Resultate anzustreben. Hervorragende Beobachter haben sich teils unbedingt dagegen ausgesprochen, teils haben sie die Ausschliessung einer Beobachtung von für jeden einzelnen Fall besonders anzustellenden Erwägungen abhängig gemacht, statt sie einer alle Fälle umfassenden Regel anheimzugeben, welche sich nach der numerischen Grösse des Beobachtungsresultats allein richtet.

Bessel*) bemerkt bei einer Gelegenheit hierüber folgen-

*) Gradmessung in Ostpreussen, pag. 67.

des: „Wir haben die Regel angenommen und ohne Ausnahme befolgt, die Anstellung einer Beobachtung selbst als die Anerkennung hinreichend günstiger äusserer Umstände anzusehen, d. h. wir haben jede gemachte Beobachtung, und zwar alle mit gleichem Gewicht, zu dem Resultate stimmen lassen, ohne das etwaige Zusammentreffen ungünstiger Umstände mit der stärkeren Abweichung einer Beobachtung als einen Grund zu ihrer Ausschliessung gelten zu lassen. Wir haben geglaubt, nur durch die feste Beobachtung dieser Regel Willkür aus unseren Resultaten entfernen zu können."

Airy*) kommt in seiner Kritik des Peirce'schen Kriteriums zu folgenden Schlüssen:

1) Die mathematische Theorie der Wahrscheinlichkeit wird in allen Fragen hinfällig, welche sich auf Fehler von übermässiger Grösse beziehen.

2) Keine Betrachtung der Grösse der übrigbleibenden (scheinbaren) Fehler an sich kann zur Ausscheidung eines Resultats berechtigen.

3) Zur Ausscheidung eines Resultats sind wir nur dann berechtigt, wenn wir bei der besten Schätzung der Grenzen, innerhalb welcher die verschiedenen Fehlerursachen wirken können, finden, dass das Zusammenwirken dieser Ursachen unmöglich einen Widerspruch von der fraglichen Grösse hervorbringen kann;

4) und wenn wir bemerken, dass andere Ursachen gewirkt haben können, die ihrer Natur nach bei gewöhnlichen Beobachtungsreihen nicht als wirkend anzusehen sind.

Wie man sieht, werden die hier gestellten Bedingungen nur in den seltensten Fällen erfüllbar sein.

In entschiedenerer Weise spricht Faye**) sich über den Gegenstand aus. Er erblickt in der Ausscheidung von Beobachtungen eine schwere Unzukömmlichkeit, da es dem Rechner in vielen Fällen leicht wäre, auf diesem Wege aus den Beobachtungen das ihm am besten zusagende Resultat zu ziehen, um dadurch eine vorgefasste Meinung zu stützen.

---

*) Vgl. Art. 92.

**) Compt. rend., CVI, pag. 783 flg.

Die beste Regel sei daher die, nur solche Beobachtungen auszuschliessen, welche sich als zweifelhaft kennzeichnen in dem Augenblicke, wo sie gemacht werden, und vor jedweder Rechnung.

Dass die Auswahl gerade die gegenteilige Wirkung von der beabsichtigten haben könne, dafür gibt Airy einen beachtenswerten Beleg. Im vorigen Jahrhundert, zu einer Zeit, wo die Figur der Erde noch unvollkommen bekannt war, wurden in Beachy Head und Dunnose in England gegenseitige Azimutbeobachtungen ausgeführt zum Zwecke der geographischen Längeneinteilung Englands. Die Resultate waren beträchtlich fehlerhaft. Die Beobachtungsbücher kamen später in die Verwahrung General Colby's und dieser fand, dass zur Ableitung jener Resultate nur die am meisten übereinstimmenden Beobachtungen ausgesucht und benutzt worden sind. Nachdem man alle, auch die am meisten widersprechenden, herangezogen, ward das Ergebnis ein ganz vorzügliches.

96. Wie schon hervorgehoben wurde, sind die Versuche, durch Ausscheidung widersprechender Beobachtungen die Resultate zu verbessern, aus der bei jedem Beobachter fest begründeten Überzeugung hervorgegangen, dass selbst unter scheinbar gleichen äusseren Umständen und mit derselben Sorgfalt angestellte Beobachtungen nie von gleicher Güte sind; mit anderen Worten, dass die Annahme, die Fehler der Beobachtungen seien insgesamt einem und demselben Gesetze von der Form $\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2}$ unterworfen, niemals vollkommen zutrifft. Hiermit entfällt aber auch die wesentliche Voraussetzung dafür, dass das arithmetische Mittel der wahrscheinlichste Wert der beobachteten Grösse sei; dasselbe kann vielmehr nur eine Näherung dieses Wertes darstellen. Es handelt sich nun darum, auf welchem Wege eine Verbesserung dieses Approximativwertes zu erreichen ist mit Beibehaltung aller Beobachtungen.

In diesem Sinne ist der Gegenstand von De Morgan*) und unabhängig von ihm durch Glaisher**) aufgefasst worden.

*) Encycl. Metropolitana, II, „Theory of Probab.", pag. 456.

**) Monthly Not. of the R. Astron. Soc., XXXIII, pag. 391 flg.

Es liegt die Aufgabe vor: Gegeben ist eine Anzahl direkter Beobachtungen einer und derselben Grösse; man soll das wahrscheinlichste Resultat ableiten.

Die erste Annahme, dass alle Beobachtungen demselben Gesetze $\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2}$ folgen, führt zu dem arithmetischen Mittel. Der Wert von h ist zugleich näherungsweise durch die Beobachtungen bestimmt. Damit findet das Verfahren in der Regel seinen Abschluss.

Man geht also so vor, als ob man einen Grund dafür hätte anzunehmen, dass ein und dasselbe h zur Darstellung aller Beobachtungen geeignet sei, während man a priori keine positive Kenntnis über den Gegenstand hat und a posteriori keine andere als die, welche sich aus den Beobachtungen selbst ableiten lässt. In Wirklichkeit werden den einzelnen Beobachtungen verschiedene h entsprechen; um zu einer Schätzung derselben zu gelangen, verfährt Glaisher wie folgt.

Man habe aus den Beobachtungen $l_1, l_2, \ldots l_n$ das arithmetische Mittel x und den Wert für h abgeleitet. Sind die Beobachtungen gut und zahlreich, so wird x dem wahren Werte nahe sein und man kann die scheinbaren Fehler $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ wie wahre Fehler ansehen. Das numerisch grösste unter den λ folgt höchst wahrscheinlich einem Gesetze, in welchem h einen kleineren Wert hat als den aus der Gesamtheit berechneten; einen nächstgrössern Wert wird das h des zweitgrössten λ haben u. s. f. Um diese gegenseitige Abwägung der Beobachtungen zu bewerkstelligen, wird festgesetzt, eine Beobachtung sei als genau (im gewöhnlichen Sinne des Wortes) anzusehen, wenn sie von dem wahren Werte nicht mehr als um einen festgesetzten kleinen Betrag δ differiert, wenn also ihr Fehler zwischen den Grenzen $0 - \delta$ und $0 + \delta$ eingeschlossen ist. Dann ist die Wahrscheinlichkeit, eine Beobachtung, welche dem Gesetze $\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2}$ folgt, sei genau, gleich $\frac{2h\delta}{\sqrt{\pi}}$ und ändert sich also wie h, wenn das Gewicht sich wie h^2 ändert, so dass das Gewicht einer Beobachtung proportional ist dem Quadrat der Wahrscheinlichkeit, dass sie genau sei.

Nun ist die Wahrscheinlichkeit, dass x der wahre Wert der beobachteten Grösse sei, unter Annahme eines einheitlichen h proportional

$$e^{-h^2\{(x-l_1)^2+(x-l_2)^2+\cdots+(x-l_n)^2\}},$$

daher die Wahrscheinlichkeit, dass l_1 der wahre Wert sei, proportional

$$e^{-h^2\{(l_1-l_2)^2+\cdots+(l_1-l_n)^2\}},$$

dass l_2 es sei, proportional

$$e^{-h^2\{(l_2-l_1)^2+\cdots+(l_2-l_n)^2\}}$$

u.s.w.; bezeichnet man diese Ausdrücke mit $\sqrt{p_x}, \sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, \ldots,$ so sind dem obigen zufolge die Gewichte der Beobachtungen $l_1, l_2, \ldots$ proportional den Grössen $p_1, p_2, \ldots,$ und man hat als zweite Näherung für den Wert der beobachteten Grösse (s. Art. 23 und 49)

$$x' = \frac{p_1 l_1 + \cdots + p_n l_n}{p_1 + \cdots + p_n}.$$

Daraus, dass die Wahrscheinlichkeit, es sei x' der wahre Wert der beobachteten Grösse, nunmehr proportional ist

$$e^{-\{p_1(x'-l_1)^2+p_2(x'-l_2)^2+\cdots+p_n(x'-l_n)^2\}},$$

ergeben sich durch Anwendung ähnlicher Schlüsse neue Gewichte $p_1', p_2', \ldots$ der Beobachtungen, mit deren Benützung ein neuer Näherungswert x'' der Unbekannten zu rechnen ist, und dieser Prozess ist so lange fortzusetzen, bis die Gleichungen $p_1^{(n+1)} = p_1^{(n)}$, $p_2^{(n+1)} = p_2^{(n)}, \ldots$ nahe genug erfüllt sind ($p_x, p_{x'}, \ldots$ können jeweilen als Einheit der Gewichte angenommen werden). Dann sind die wahrscheinlichsten Gewichte der Beobachtungen und der wahrscheinlichste Wert der beobachteten Grösse mit zureichender Schärfe bestimmt*).

*) Ein Verfahren, welches an das hier vorgeführte erinnert, ist schon 1821 von Svanberg angegeben worden: Dissertation sur la recherche du milieu le plus probable entre les résultats de plusieurs observations ou expériences, Gergonne Ann. de Mathém., II, pag. 181 flg. Als Gewichte der Beobachtungen werden die reciproken Werte ihrer Abweichungen von dem vorangehenden Mittelwert oder deren Quadrate benützt.

Die einzige Annahme, die dabei gemacht worden ist, besteht darin, dass irgend ein Fehler einem Gesetz von der Form $\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 z^2}$ folge.

Die Berechnung von $p_1, p_2, \ldots$, der Data für die zweite Näherung und ebenso für jede folgende lässt sich vereinfachen. Da nämlich $x = \frac{[l]}{n}$, so ist

$$(x - l_1)^2 + (x - l_2)^2 + \cdots + (x - l_n)^2 = - nx^2 + [ll]$$

und daher

$$p_x = e^{-2h^2(-nx^2 + [ll])};$$

setzt man irgend einen andern Wert z an die Stelle von x, so wird

$$(z - l_1)^2 + (z - l_2)^2 + \cdots + (z - l_n)^2 = nz^2 - 2nxz + [ll],$$

somit

$$\frac{p_z}{p_x} = e^{-2nh^2(x-z)^2},$$

so dass sich, wenn p_x als Einheit gewählt wird, für $z = l_1, l_2, \ldots$ ergibt

$$p_1 = e^{-2nh^2(x-l_1)^2}, \quad p_2 = e^{-2nh^2(x-l_2)^2}, \quad \ldots$$

oder auch, wenn man an Stelle von h den mittleren Fehler μ einer Beobachtung und für $x - l_1$, $x - l_2$, $\cdots$ die gebräuchlichen Zeichen einführt,

$$p_1 = e^{-n\left(\frac{\lambda_1}{\mu}\right)^2}, \quad p_2 = e^{-n\left(\frac{\lambda_2}{\mu}\right)^2}, \quad \ldots$$

Je grösser also der scheinbare Fehler einer Beobachtung, desto tiefer wird ihr Gewicht und somit ihr Einfluss auf die Bestimmung des zweiten Näherungswertes herabgedrückt.

Ferner ist wegen $x' = \frac{[pl]}{[p]}$

$$p_1(x' - l_1)^2 + p_2(x' - l_2)^2 + \cdots + p_n(x' - l_n)^2 = -[p]x'^2 + [pll]$$

und daher

$$p'_{x'} = e^{-r^2(-[p]x'^2 + [pll])};$$

setzt man an Stelle von x' einen andern Wert z und bemerkt, dass

$$p_1(z - l_1)^2 + p_2(z - l_2)^2 + \cdots + p_n(z - l_n)^2$$
$$= [p]z^2 - 2[p]zx' + [pll],$$

so findet man

$$\frac{p'_z}{p'_{x'}} = e^{-2[p](x'-z)^2}$$

und wenn wieder $p'_{x'}$ als Einheit gewählt wird,

$$p_1' = e^{-2[p]\lambda_1'^2}, \quad p_2' = e^{-2[p]\lambda_2'^2}, \quad \ldots$$

97. Wenn auch bei Befolgung dieser Methode theoretisch alle Beobachtungen zur Bildung der aufeinander folgenden Näherungswerte x, x', ... verwendet werden, so ist die praktische Ausführung doch mit der Ausscheidung derjenigen Beobachtungen, welche von dem einfachen arithmetischen Mittel beträchtlich abweichen, gleichbedeutend, indem sich für diese Beobachtungen so kleine Gewichte ergeben, dass sie so gut wie einflusslos werden. Dies zeigt schon folgende Überlegung. Der scheinbare Fehler der dem arithmetischen Mittel zunächstliegenden Beobachtung kann (s. Art. 86) annähernd gleich $\frac{\mu\sqrt{2}}{n}$ gesetzt werden; ihr Gewicht für die Ableitung von x' wird hiernach näherungsweise

$$p = e^{-\frac{2}{n}}$$

und daher, wenn n eine (mässig) grosse Zahl ist, der Einheit nahe sein. Die Abweichung λ der vom arithmetischen Mittel am weitesten abliegenden Beobachtung dagegen ist $\varkappa\mu$, wo $\varkappa$ eine mit n wachsende Zahl bedeutet, ihr Gewicht

$$p = e^{-n\varkappa^2}$$

selbst für ein mässig grosses n von Null kaum zu unterscheiden.

Um dies besser ersichtlich zu machen, möge das Verfahren — wenigstens in seinem ersten Schritt — auf die Beobachtungsreihe des Art. 82 angewandt werden.

Bestimmt man mit Hilfe von $x = 3{,}93$ die Gewichte der einzelnen Beobachtungen und legt die Rechnung auf vier Dezimalen an, alle Beobachtungen bei Seite lassend, deren Gewicht kleiner wird als eine Einheit der fünften Dezimalstelle, so bleiben blos 12 von den 40 Beobachtungen übrig und zwar die folgenden mit den angesetzten Gewichten:

l	p
3,68	0,0496
3,76	0,2486
3,78	0,3383
3,78	0,3383
3,91	0,9802
3,95	0,9802
3,98	0,8870
4,08	0,3383
4,10	0,2486
4,15	0,0975
4,18	0,0496
4,21	0,0230

Von dieser Reihe an nehmen die Gewichte nach beiden Seiten hin sehr rasch ab.

Das aus der reduzierten Reihe resultierende arithmetische Mittel

$$x' = 3,89$$

scheint allerdings der Wahrheit besser zu entsprechen als $x = 3,93$. Ordnet man nämlich die 40 Beobachtungen, die grösste neben die kleinste, die zweitgrösste neben die zweitkleinste stellend u. s. f., und nimmt aus jedem Paare das arithmetische Mittel, so ergibt sich folgende Zusammenstellung*):

		Mittel.
6,35	2,28	4,315
5,48	2,48	3,98
5,23	2,64	3,935
5,21	2,66	3,935
5,08	2,75	3,915
4,84	2,81	3,825
4,76	2,95	3,855
4,65	2,98	3,815
4,59	3,11	3,85
4,51	3,22	3,865
4,49	3,26	3,875

*) Vgl. Faye, Compt. rend., CVI, pag. 783 flg.

		Mittel.
4,45	3,27	3,86
4,43	3,28	3,855
4,43	3,43	3,93
4,21	3,68	3,945
4,18	3,76	3,97
4,15	3,78	3,965
4,10	3,78	3,94
4,08	3,91	3,995
3,98	3,95	3,965

Die Ziffer 3 der Einer ist jedenfalls sicher bestimmt, sie ist allen Partialmitteln bis auf eines gemeinschaftlich; die Stelle der Zehntel liegt augenscheinlich zwischen 8 und 9, jedenfalls näher an 9, so dass der Wert 3,89 mehr Vertrauen erweckt als 3,93, welches zu gross zu sein scheint.

Schliesst man die Beobachtung 6,35 vermöge ihrer auffällig grossen Abweichung von x aus (vgl. Art. 92 und Faye, l. c.), so geben die übrigen 3,87 als arithmetisches Mittel.

Zweiter Teil.

Die Methode der kleinsten Quadrate.

---

§ 1. Stellung der Aufgabe.

98. Eine der unmittelbaren Beobachtung zugängliche Grösse L sei lineare Funktion von m unbekannten Elementen $x, y, z, \cdots$. In einem gegebenen Falle sei $a_i x + b_i y + c_i z + \cdots$ ihr wahrer Wert, l_i der durch Beobachtung gefundene Wert, ε_i sein wahrer unbekannter Fehler; aus der Gleichsetzung der beiden Ausdrücke $a_i x + b_i y + c_i z + \cdots$ und $l_i + \varepsilon_i$ ergibt sich die Gleichung

$$\varepsilon_i = - l_i + a_i x + b_i y + c_i z + \cdots. \tag{1}$$

Jede Beobachtung führt zu einer solchen Fehlergleichung, in welcher die Koeffizienten $a_i, b_i, c_i, \ldots$ bekannt sind, eventuell a priori, d. i. vor Ausführung der Beobachtung angegeben werden können.

Sind n Beobachtungen $l_1, l_2, \ldots l_n$ gegeben, so führen sie zu einem System von n Fehlergleichungen, als deren Typus die obige Gleichung (1) gelten kann; man hat darin der Reihe nach $i = 1, 2, \cdots n$ zu setzen.

99. Auf diesen Typus kann aber auch der Fall, wenigstens näherungsweise, zurückgeführt werden, wo die der Beobachtung unterworfene Grösse L keine lineare Funktion der Elemente ist. Sind nämlich Näherungswerte der letzteren bekannt und beziehungsweise $x, y, z, \ldots$ die an diesen Näherungswerten anzubringenden Korrektionen, so wird, wenn der in einem gegebenen Falle mit den Näherungswerten gerechnete Wert von L gleich $L^{(i)}$ ist, der wahre Wert mit um so grösserer Annäherung durch einen Aus-

druck von der Form $L^{(i)} + a_i x + b_i y + c_i z + \cdots$ sich darstellen lassen, je mehr die Kleinheit der anzubringenden Korrektionen zur Vernachlässigung der Glieder mit Potenzen und Produkten dieser Korrektionen berechtigt. Bezeichnet ferner $l^{(i)}$ den aus der Beobachtung hervorgegangenen Wert von L und ε_i seinen unbekannten Fehler, so besteht näherungsweise die Gleichung

$$l^{(i)} + \varepsilon_i = L^{(i)} + a_i x + b_i y + c_i z + \cdots. \tag{2}$$

Schreibt man für die Differenz $l^{(i)} - L^{(i)}$, welche den Überschuss des beobachteten Wertes über den aus den Näherungswerten der Elemente gerechneten darstellt, den Buchstaben l_i, so kommt man wieder auf die früher dargelegte Form (1) der Fehlergleichung.

100. Ist m, die Anzahl der zu bestimmenden Elemente oder der Korrektionen ihrer Näherungswerte, grösser als n, die Anzahl der Beobachtungen, so ist die Aufgabe auch dann unbestimmt, wenn man den unbekannten Fehlern $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$, welche die linken Seiten der Fehlergleichungen ausmachen, bestimmte Werte beilegt.

Sie wird zu einer bestimmten Aufgabe der Algebra, wenn $m = n$ und wenn den Fehlern $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ bestimmte Werte erteilt werden, z. B. durchweg der Wert Null, was so viel ausdrückt, als dass die Beobachtungen als fehlerfrei angesehen werden.

Wenn aber m kleiner als n ist, so ist die Aufgabe überbestimmt, wenn den Fehlern $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ bestimmte Werte beigelegt werden. Sie ist aber völlig unbestimmt, wenn man die Fehler, was sie auch in der That sind, als unbekannt auffasst.

In rein mathematischer Formulierung lautet die Aufgabe, welche in dem letztgedachten Falle vorliegt, folgendermaassen:

Zwischen m unbekannten Elementen $x, y, z, \ldots$ und den bekannten Grössen $l_i, a_i, b_i, c_i, \ldots$ $(i = 1, 2 \ldots n)$ bestehen n $(> m)$ lineare Gleichungen

$$\varepsilon_i = -l_i + a_i x + b_i y + c_i z + \cdots;$$

die linke Seite einer jeden solchen Gleichung, ε_i, ist

zwar unbekannt, aber nicht aller Werte mit demselben Grade der Wahrscheinlichkeit fähig. Man soll ein Wertsystem der ε_i bestimmen, welches das System der Gleichungen zu einem widerspruchslosen macht und die vorteilhaftesten Werte der Elemente $x, y, z, \ldots$ zur Folge hat.

Diese Formulierung der Aufgabe zeigt, dass ihre Lösung die Aufstellung eines Prinzips darüber erfordert, welche Werte der Elemente man als die vorteilhaftesten aufzufassen habe.

Das gefundene Wertsystem der ε_i wird, wenn nicht ein ausserordentlicher Zufall es anders fügt, von dem System der wirklich begangenen Fehler verschieden sein und soll als das System der scheinbaren Fehler bezeichnet werden (vgl. Art. 62). Ebenso wird sich das vorteilhafteste Wertsystem der Elemente von ihrem wahren Wertsystem unterscheiden.

Hiermit ist die typische Form desjenigen Problems gekennzeichnet, welches man als Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen zu bezeichnen pflegt.

§ 2. Die Vorläufer von Gauss.

101. Die Lösung der Aufgabe ward zuerst von Legendre*) veröffentlicht. Ihr Inhalt spricht sich in dem Satze aus, dass unter allen Wertsystemen der Elemente dasjenige das vorteilhafteste sei, welches dem System der scheinbaren Fehler die kleinstmögliche Quadratsumme verleiht. Legendre hat dem hierdurch vorgeschriebenen Verfahren den kurzen Namen „Methode der kleinsten Quadrate"**) beigelegt. Eine eigentliche Begrün-

*) In einem Anhange der Nouvelles Méthodes pour la détermination des orbites des comètes, datiert vom 6. März 1805 (das Titelblatt trägt die Jahreszahl 1806). Von der mitgeteilten Anwendung auf die Bestimmung der Gestalt des Meridians aus Breitengradmessungen abgesehen umfasst die Darstellung blos vier Seiten. Den wesentlichen Teil hat Legendre 1814 in den Mém. Inst. France p. a. 1810 republiziert, um auf seine Priorität in der Veröffentlichung aufmerksam zu machen.

**) Die treffendere Bezeichnung „Methode der kleinsten Quadratsummen" ist schon 1841 von Hülsse gebraucht worden: Über die

dung des Verfahrens zu geben hat er nicht unternommen. Er führt es nur ein und sucht es zu rechtfertigen mit den Worten: „De tous les principes qu'on peut proposer pour cet objet, je pense qu'il n'en est pas de plus général, de plus exact, ni d'une application plus facile que celui ... qui consiste à rendre minimum la somme des quarrés des erreurs. Par ce moyen, il s'établit entre les erreurs une sorte d'équilibre qui empêchant les extrêmes de prevaloir, est très-propre à faire connoître l'état du systême le plus proche de la vérité."

Um die Funktion $\Sigma(-l_i + a_i x + b_i y + c_i z + \cdots)^2$ dieser Vorschrift gemäss in Bezug auf die Grössen $x, y, z \ldots$ zu einem Minimum zu machen, hat man diese Grössen aus den Gleichungen*)

$$\begin{array}{l} [aa]x + [ab]y + [ac]z + \cdots = [al] \\ [ba]x + [bb]y + [bc]z + \cdots = [bl] \\ [ca]x + [cb]y + [cc]z + \cdots = [cl] \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

zu bestimmen, deren Anzahl mit jener der Elemente übereinstimmt.

Zur Rechtfertigung führt Legendre weiter aus, dass die Regel des arithmetischen Mittels eine sehr einfache Folgerung seiner allgemeinen Methode sei. Nach Anwendung auf ein geometrisches Problem fügt Legendre nochmals erläuternd hinzu, die Methode führe gewissermaassen zu dem Mittelpunkt, um welchen sich alle durch die Beobachtung

---

Berechnung von Beobachtungen durch die Methode der kleinsten Quadratsumme, Leipzig. Neuerdings suchte sie Jordan wieder einzuführen: Handbuch der Vermessungskunde, 2. Aufl., I, 1877, wie es scheint ohne Erfolg; er hat sie bei der 3. Aufl. (1888) selbst wieder fallen lassen.

*) In abgeänderter Bezeichnungsweise. Legendre bedient sich zur Bezeichnung der Summen $a_1^2 + a_2^2 + \cdots$, $a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots$, für welche Gauss die oben gebrauchte und jetzt allgemein übliche Bezeichnung $[aa]$, $[ab]$, ... zum erstenmale in der Disquisitio de elementis ellipticis Palladis etc. 1811 zur Anwendung brachte, der Symbole $\int a^2$, $\int ab$, $\cdots$.

gelieferten Resultate ordnen derart, dass sie möglichst wenig von ihm abweichen.

Hiermit ist der wesentliche Inhalt der ersten Publikation über die Methode der kleinsten Quadrate erschöpft.

102. Der Zeitfolge nach wäre an zweiter Stelle die in Art. 42 bereits besprochene Publikation Adrain's aus dem Jahre 1808 zu nennen. Nach den Schlussfolgerungen Glaisher's scheint es in der That, dass Adrain unabhängig von Legendre zu der Methode der kleinsten Quadrate als einem praktischen Verfahren zur Auflösung eines Systems überzähliger, einander widersprechender linearer Gleichungen geführt worden ist und dass er nachträglich bemüht war, für dieses Verfahren eine Begründung zu geben. Das wenig befriedigende Ergebnis dieser Bemühung ist die in dem eben angezogenen Artikel erörterte Ableitung des Fehlergesetzes.

Adrain hat, nach dem Berichte Abbe's, auch (vier) Anwendungen der Methode gegeben, und eine derselben führt Glaisher*) an. Sie besteht in folgendem. Hat man eine Tafel der Längen des Sekundenpendels unter verschiedenen Breiten, so sollte, dem Clairaut'schen Theorem zufolge, durch dieselben eine Gleichung $r = x + y \sin^2 \lambda$ streng erfüllt werden, in welcher r die Pendellänge, λ die Breite und x, y gewisse Konstante bedeuten. Nachdem dies nicht der Fall ist, bestimmt Adrain x und y derart, dass $(x + y \sin^2 \lambda_1 - r_1)^2 + (x + y \sin^2 \lambda_2 - r_2)^2 + \cdots$ ein Minimum werde.

Nach Vorführung dieser vornehmlich vom historischen Standpunkte bemerkenswerten Arbeiten gehen wir daran, die wissenschaftliche Begründung der Methode der kleinsten Quadrate darzulegen.

---

*) Auf Grund einer zweiten Veröffentlichung Adrain's aus dem Jahre 1818, betitelt Investigation of the Figure of the Earth and of the Gravity in different Latitudes, und in den Transact. of the Americ. Philos. Soc., I, pag. 119 flg. erschienen, deren Entstehung jedoch Abbe gleichfalls in das Jahr 1808 verlegt.

§ 3. Erster Beweis von Gauss.

103. Der erste Beweiss, welchen Gauss*) für die Methode der kleinsten Quadrate gegeben, zugleich der erste, der diese Methode auf wahrscheinlichkeitstheoretische Grundlagen zu stellen sucht, beruht auf dem Fehlergesetz, welches er aus der Hypothese des arithmetischen Mittels abgeleitet hat (s. Art. 23).

Es sei

$$\varepsilon_i = -l_i + a_i x + b_i y + c_i z + \cdots \qquad (i = 1, 2, \cdots n)$$

das System der Fehlergleichungen; zunächst werde vorausgesetzt, dass die Wahrscheinlichkeit, der Fehler irgend einer Beobachtung liege zwischen den Grenzen ε und $\varepsilon + d\varepsilon$, gegeben ist durch $\varphi(\varepsilon)d\varepsilon = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon$. Dann ist, vor Anstellung der Beobachtungen, die Wahrscheinlichkeit, dass den n Beobachtungen die Fehler $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ anhaften werden, proportional dem Produkte

$$\Omega = \varphi(\varepsilon_1)\varphi(\varepsilon_2) \cdots \varphi(\varepsilon_n).$$

Nachdem die Beobachtungen ausgeführt worden und gegeben sind, ist die Wahrscheinlichkeit eines Wertsystems der Unbekannten $x, y, z \ldots$ demselben Ausdruck proportional, wenn man annimmt, dass ausser den Beobachtungen keine andern Data zur Bestimmung der Unbekannten vorliegen, so dass alle Wertsysteme derselben a priori gleich wahrscheinlich sind.

Es ist demnach dasjenige Wertsystem der Unbekannten $x, y, z, \ldots$ das wahrscheinlichste, für welches das Produkt Ω oder der Ausdruck

$$e^{-h^2(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \cdots + \varepsilon_n^2)}$$

ein Maximum, also die Summe

---

*) Im dritten Abschnitte des zweiten Buches der 1809 erschienenen Theoria motus corporum coelestium etc., welcher betitelt ist: Determinatio orbitae observationibus quotcunque maxime satisfacientis. Art. 186 bemerkt Gauss, dass er sich des Prinzips, welches der Methode der kleinsten Quadrate zu Grunde liegt, schon seit dem Jahre 1795 bedient habe. Hiernach gebührt ihm die Priorität der Erfindung, Legendre die Priorität der Veröffentlichung.

$$\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \cdots + \varepsilon_n^2 \quad \text{ein Minimum}$$

wird, und dies führt wieder auf das System der Gleichungen

$$\begin{aligned}
[aa]x + [ab]y + [ac]z + \cdots &= [al] \\
[ba]x + [bb]y + [bc]z + \cdots &= [bl] \\
[ca]x + [cb]y + [cc]z + \cdots &= [cl] \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

welche man als Normalgleichungen zu bezeichnen pflegt.

104. Wenn dagegen die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler zwischen die Grenzen ε und $\varepsilon + d\varepsilon$ falle, nicht für jede Beobachtung dieselbe ist, wohl aber für jede durch eine Funktion der oben gedachten Form dargestellt und insbesondere für die i^{te} Beobachtung $\frac{h_i}{\sqrt{\pi}} e^{-h_i^2 \varepsilon^2} d\varepsilon$ ist, so wird Ω proportional dem Ausdruck

$$e^{-(h_1^2 \varepsilon_1^2 + h_2^2 \varepsilon_2^2 + \cdots + h_n^2 \varepsilon_n^2)};$$

für das wahrscheinlichste Wertsystem der Unbekannten muss also

$$h_1^2 \varepsilon_1^2 + h_2^2 \varepsilon_2^2 + \cdots + h_n^2 \varepsilon_n^2$$

ein Minimum werden. Führt man eine Beobachtung, welcher das Präzisionsmaass h zukommt, als Gewichtseinheit ein und bezeichnet die auf dieselbe bezogenen Gewichte der Beobachtungen $l_1, l_2, \ldots l_n$ mit $p_1, p_2, \ldots p_n$, so zwar, dass

$$1 : p_1 : p_2 : \cdots : p_n = h^2 : h_1^2 : h_2^2 : \cdots h_n^2,$$

so ergeben sich die wahrscheinlichsten Werte der Unbekannten aus der Bedingung

$$p_1 \varepsilon_1^2 + p_2 \varepsilon_2^2 + \cdots + p_n \varepsilon_n^2 \quad \text{ein Minimum}$$

oder aus dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
[paa]x + [pab]y + [pac]z + \cdots &= [pal] \\
[pba]x + [pbb]y + [pbc]z + \cdots &= [pbl] \, . \\
[pca]x + [pcb]y + [pcc]z + \cdots &= [pcl] \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Dies kommt auf dasselbe hinaus, wie wenn man die Fehlergleichungen der Reihe nach mit den Zahlen

$$\sqrt{p_1}, \ \sqrt{p_2}, \ \ldots \ \sqrt{p_n}$$

multipliziert und dann so kombiniert hätte wie im ersten Falle, d. h. so, als ob alle Beobachtungen von gleicher Genauigkeit wären.

105. Das Prinzip, welches der vorstehenden Lösung der Aufgabe zu Grunde liegt, besteht also darin, dass diejenigen Werte der Unbekannten für die vorteilhaftesten erklärt werden, welche den Beobachtungen ein System von Fehlern zuschreiben, deren Koexistenz unter allen möglichen Systemen die grösste Wahrscheinlichkeit hat.

Zu diesem Prinzip gesellt sich als weitere Grundlage das spezielle Fehlergesetz $\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2}$, welches von Gauss aus der Hypothese des arithmetischen Mittels abgeleitet worden ist. Infolgedessen können alle Untersuchungen, deren Ziel die Ableitung jenes Fehlergesetzes aus anderen Annahmen ist, und ebenso alle Untersuchungen, welche die Zurückführung der Hypothese des arithmetischen Mittels auf einfachere Voraussetzungen anstreben, als eben so viele Beweise oder Beweisversuche der Methode der kleinsten Quadrate angesehen werden. Mit diesem Gesetze steht aber und fällt die Bedeutung der Resultate als der wahrscheinlichsten Werte der unbekannten Elemente.

§ 4. Der Beweis von Laplace.

106. Die Untersuchungen, welche Laplace über die aus Beobachtungen abgeleiteten Resultate, insbesondere über die Methode der kleinsten Quadrate angestellt hat, gehören unstreitig zu den schwierigsten Teilen seiner Théorie analyt. des Probab.*), ihre Resultate aber auch zu den merkwürdigsten und wichtigsten. Sie bilden den Inhalt des vierten Kapitels des zweiten Buches und insbesondere sind es die Artikel 20 und 21, welche hier zunächst in Betracht kommen, weil sie die Begründung unserer Methode enthalten.

*) Zum erstenmale erschienen 1809, in dritter Auflage (mit der berühmten Einleitung und drei Supplementen) 1820, in vierter Auflage (VII der Oeuvres de Laplace, nation. édit.) 1847.

Laplace's Untersuchungen sind vielfach kommentiert, aber auch verallgemeinert und weiter geführt worden. Man kann jedoch diese von späteren Geometern geleisteten sehr bedeutenden Arbeiten nicht würdigen, ohne die von Laplace gegebene Grundlage kennen gelernt und erfasst zu haben. Wir werden daher zuvörderst Laplace's eigene Analyse, unter Anwendung jetzt üblicher Bezeichnungen, darlegen, um dann auf neuere Untersuchungen seiner Methode überzugehen.

107. Aus einer sehr grossen Anzahl n von Fehlergleichungen der allgemeinen Form

$$\varepsilon_i = -l_i + a_i x \qquad (i = 1, 2, \cdots n) \tag{1}$$

ist der vorteilhafteste Wert des unbekannten Elementes x zu bestimmen*).

Man multipliziere, um eine hierzu geeignete Gleichung zu erhalten, jede der Fehlergleichungen mit einer positiven oder negativen ganzen Zahl α_i und bilde die Summe

$$[\alpha\varepsilon] = -[\alpha l] + [\alpha a]x, \tag{2}$$

aus welcher Gleichung sich

$$x = \frac{[\alpha l]}{[\alpha a]} + \frac{[\alpha\varepsilon]}{[\alpha a]} \tag{3}$$

---

*) Laplace hatte ursprünglich (1792) zur Lösung dieser Aufgabe ein anderes Verfahren in Anwendung gebracht und zwar gelegentlich der Frage, zu entscheiden, ob die vorhandenen Gradmessungen sich mit einem elliptischen Meridian vereinbaren lassen. Das ohne Begründung aufgestellte Prinzip besteht darin, 1) dass die Summe der Fehler Null sei; 2) dass die Summe der Absolutwerte der Fehler ein Minimum sei — und Laplace bezeichnet die auf Grund dieses Prinzips abgeleitete Ellipse als die „wahrscheinlichste". Hist. Acad. Paris p. a. 1789, zum grössten Teil wiedergegeben in der Mécanique céleste, II, art. 39—42. — Estienne ist auf dieses Verfahren, welches er Methode der kleinsten arithmetischen Summe nennt und empfiehlt, wieder zurückgekommen. Die von ihm angegebene Regel zur Bestimmung des wahrscheinlichsten Wertes einer direkt beobachteten Grösse (s. Art. 22) liefert nämlich ein Resultat, welchem die kleinste Summe der Absolutwerte der Fehler entspricht, wie man sich leicht überzeugt, wenn man bemerkt, dass für jeden Punkt ausserhalb einer Strecke die Summe seiner absoluten Entfernungen von den Endpunkten dieselbe und kleiner ist als für irgend einen Punkt innerhalb der Strecke. (Vgl. hierzu die Bemerkungen in Art. 22.) Étude sur les erreurs d'observat., pag. 9 und 23 flg.

ergibt. Setzt man das aus den Fehlern $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ zusammengesetzte Aggregat

$$E = [\alpha\varepsilon]$$

gleich Null, so erhält man für x die Bestimmung

$$x = \frac{[\alpha l]}{[\alpha a]} \tag{4}$$

und ihr Fehler ist

$$u = \frac{[\alpha\varepsilon]}{[\alpha a]}. \tag{5}$$

Es ist nun die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, dass dieser Fehler zwischen gegebenen Grenzen eingeschlossen sei.

Angenommen, der Fehler einer jeden Beobachtung sei nur solcher Werte fähig, welche Vielfache eines sehr kleinen als Einheit angenommenen Betrages sind; die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler gleich η ist, sei für jede Beobachtung dieselbe und dargestellt durch $\varphi\left(\frac{\eta}{g}\right)$, wenn g die in derselben Einheit ausgedrückte obere Grenze der Fehler bezeichnet, während $-g$ die untere Grenze ist, wenn man weiter annimmt, dass positive und negative Fehler gleichen Betrages gleich wahrscheinlich sind. Hiernach bedeuten η, g sehr grosse ganze Zahlen, deren erste positiv sowohl als negativ sein kann.

Setzt man

$$Q_i = \Sigma\varphi\left(\frac{\eta}{g}\right) e^{\alpha_i \eta \Theta \sqrt{-1}},$$

wobei die Summierung über alle möglichen Werte von η, d. i. von $\eta = -g$ bis $\eta = g$ auszudehnen ist, so stellt in der Entwicklung des Produktes

$$Q_1 Q_2 \cdots Q_n$$

der Koeffizient von $e^{\lambda\Theta\sqrt{-1}}$ die Wahrscheinlichkeit dar, dass $E = \lambda$ sei, λ in derselben Einheit ausgedrückt wie die einzelnen Fehler. Multipliziert man daher jenes Produkt mit $e^{-\lambda\Theta\sqrt{-1}}$, so wird das von einer Potenz der Zahl e freie Glied seiner Entwicklung dieselbe Wahrscheinlichkeit darstellen. Integriert man behufs Gewinnung dieses Gliedes, nachdem man mit $d\Theta$ multipliziert hat, in Bezug auf Θ

innerhalb der Grenzen $-\pi$ und π, so ergibt sich, wenn man beachtet, dass das Integral

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{r\Theta\sqrt{-1}}\, d\Theta$$

verschwindet, für jeden positiven und negativen ganzzahligen Wert von r, während es für $r = 0$ gleich 2π ist,

$$(6) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Q_1 Q_2 \cdots Q_n e^{-\lambda\Theta\sqrt{-1}}\, d\Theta$$

als Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit, dass $E = \lambda$ ist.

Vermöge der Voraussetzung, dass $\varphi\left(\frac{\eta}{g}\right)$ eine gerade Funktion von η ist, kann man in Q_i die Glieder, welche zu gleichen und entgegengesetzten Werten von η gehören, paarweise zusammenfassen und erhält

$$\begin{aligned} Q_i &= \Sigma\varphi\left(\frac{\eta}{g}\right)\left(e^{\alpha_i\eta\Theta\sqrt{-1}} + e^{-\alpha_i\eta\Theta\sqrt{-1}}\right) \\ &= 2\Sigma\varphi\left(\frac{\eta}{g}\right)\cos\alpha_i\eta\Theta, \end{aligned}$$

wo die Summierung sich jetzt auf die positiven Werte von η allein erstreckt. Durch Entwicklung des Cosinus in eine Reihe wird weiter

$$\begin{aligned} Q_i = 2\Sigma\varphi\left(\frac{\eta}{g}\right) - \alpha_i^2 g^2\Theta^2\Sigma\left(\frac{\eta}{g}\right)^2\varphi\left(\frac{\eta}{g}\right) \\ + \frac{1}{12}\alpha_i^4 g^4\Theta^4\Sigma\left(\frac{\eta}{g}\right)^4\varphi\left(\frac{\eta}{g}\right), \cdots. \end{aligned}$$

Setzt man $\frac{\eta}{g} = \eta'$ und bemerkt, dass die kleinste Änderung von η Eins beträgt, dass also $d\eta' = \frac{1}{g}$ ist, so kommt

$$\begin{aligned} \Sigma\varphi\left(\frac{\eta}{g}\right) &= g\int_0^1 \varphi(\eta')d\eta' \\ \Sigma\left(\frac{\eta}{g}\right)^2\varphi\left(\frac{\eta}{g}\right) &= g\int_0^1 \eta'^2\varphi(\eta')d\eta' \\ \Sigma\left(\frac{\eta}{g}\right)^4\varphi\left(\frac{\eta}{g}\right) &= g\int_0^1 \eta'^4\varphi(\eta')d\eta' \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

und bedient man sich für die rechtsstehenden Integrale der Abkürzungen

$$(7)\qquad 2\int_0^1 \varphi(\eta')d\eta' = \varkappa, \qquad \int_0^1 \eta'^2\varphi(\eta')d\eta' = \varkappa'', \qquad \int_0^1 \eta'^4\varphi(\eta')d\eta' = \varkappa^{IV}, \quad \cdots$$

so wird

$$Q_i = g\varkappa - \alpha_i^2 g^3 \varkappa'' \Theta^2 + \frac{1}{12}\alpha_i^4 g^5 \varkappa^{IV}\Theta^4 - \cdots$$

$$= g\varkappa\left(1 - \frac{\varkappa''}{\varkappa}\alpha_i^2 g^2\Theta^2 + \frac{\varkappa^{IV}}{12\varkappa}\alpha_i^4 g^4\Theta^4 - \cdots\right)$$

und

$$l\cdot Q_i = l\cdot(g\varkappa) - \frac{\varkappa''}{\varkappa}\alpha_i^2 g^2\Theta^2 + \frac{\varkappa\varkappa^{IV} - 6\varkappa''^2}{12\varkappa^2}\alpha_i^4 g^4\Theta^4 - \cdots$$

oder, da $g\varkappa = 2g\int_0^1 \varphi(\eta')d\eta' = 1$, weil der Fehler zwischen den Grenzen $-g$ und $+g$ notwendig liegen muss,

$$l\cdot Q_i = -\frac{\varkappa''}{\varkappa}\alpha_i^2 g^2\Theta^2 + \frac{\varkappa\varkappa^{IV} - 6\varkappa''^2}{12\varkappa^2}\alpha_i^4 g^4\Theta^4 - \cdots$$

und

$$Q_1 Q_2 \cdots Q_n = e^{-\frac{\varkappa''}{\varkappa}[\alpha\alpha]g^2\Theta^2}\left(1 + \frac{\varkappa\varkappa^{IV} - 6\varkappa''^2}{12\varkappa^2}[\alpha^4]g^4\Theta^4 - \cdots\right).$$

Der Ausdruck (6) verwandelt sich hiernach, wenn man an Stelle von Θ die neue Variable t mittels der Gleichung

$$ng^2\Theta^2 = t^2$$

einführt, in

$$\frac{1}{2\pi g\sqrt{n}}\int_{-\pi g\sqrt{n}}^{\pi g\sqrt{n}} dt\left(1 + \frac{\varkappa\varkappa^{IV} - 6\varkappa''^2}{12\varkappa^2}\frac{[\alpha^4]}{n^2}t^2 - \cdots\right)e^{-\frac{\lambda t\sqrt{-1}}{g\sqrt{n}} - \frac{\varkappa''}{\varkappa}\frac{[\alpha\alpha]}{n}t^2}.$$

Nun sind $[\alpha\alpha]$, $[\alpha^4]$, ... Grössen von der Ordnung n, daher $\frac{[\alpha^4]}{n^2}$ eine Grösse der Ordnung $\frac{1}{n}$; vernachlässigt man Glieder dieser Ordnung der Einheit gegenüber und dehnt das Integrationsgebiet ins Unendliche aus mit Rücksicht darauf, dass n und g sehr grosse Zahlen sind, sowie mit

Rücksicht auf die Natur der Funktion unter dem Integralzeichen, so kann statt des letzten Ausdruckes

$$\frac{1}{2\pi g\sqrt{n}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\lambda t\sqrt{-1}}{g\sqrt{n}}-\frac{\varkappa''}{\varkappa}\frac{[\alpha\alpha]}{n}t^2}\,dt$$

geschrieben werden. Der Exponent lässt sich in

$$-\frac{\varkappa''}{\varkappa}\frac{[\alpha\alpha]}{n}\left(t+\frac{\varkappa}{\varkappa''}\frac{\lambda\sqrt{n}\sqrt{-1}}{2g[\alpha\alpha]}\right)^2-\frac{\varkappa}{\varkappa''}\frac{\lambda^2}{4g^2[\alpha\alpha]}$$

umgestalten und setzt man vorübergehend

$$t'=\sqrt{\frac{\varkappa''}{\varkappa}\frac{[\alpha\alpha]}{n}}\left(t+\frac{\varkappa}{\varkappa''}\frac{\lambda\sqrt{n}\sqrt{-1}}{2g[\alpha\alpha]}\right),$$

so ergibt sich für (6) der Wert

$$\frac{e^{-\frac{\varkappa\lambda^2}{4g^2\varkappa''[\alpha\alpha]}}}{2\pi g\sqrt{\frac{\varkappa''}{\varkappa}[\alpha\alpha]}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t'^2}\,dt',$$

d. i. endlich

$$\frac{e^{-\frac{\varkappa\lambda^2}{4g^2\varkappa''[\alpha\alpha]}}}{2g\sqrt{\pi\frac{\varkappa''}{\varkappa}[\alpha\alpha]}}.$$

Setzt man $\lambda = g\tau\sqrt{n}$ und beachtet, dass die kleinste Änderung von λ Eins ist, so folgt $d\tau = \frac{1}{g\sqrt{n}}$; mithin wird

$$(8)\qquad \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{\pi\frac{\varkappa''}{\varkappa}[\alpha\alpha]}}\int_0^{\tau} e^{-\frac{\varkappa n\tau^2}{4\varkappa''[\alpha\alpha]}}\,d\tau$$

die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

$$0 \leqq E \leqq g\tau\sqrt{n}$$

ist.

Ersetzt man in dem Ausdruck (5), welcher den aus der Annahme $[\alpha\varepsilon] = 0$ in der Bestimmung von x hervorgehenden Fehler bedeutet, $[\alpha\varepsilon] = E$ durch $g\tau\sqrt{n}$, so wird

$$\tau = \frac{u[\alpha\alpha]}{g\sqrt{n}}$$

und hiermit entsteht aus (8)

$$(9)\qquad \frac{[\alpha a]}{2g\sqrt{\varkappa\frac{\varkappa''}{\varkappa}[\alpha\alpha]}}\int\limits_0^u e^{-\frac{\varkappa u^2[\alpha a]^2}{4g^2\varkappa''[\alpha\alpha]}}du$$

als Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler in der Bestimmung (4) des Elementes x zwischen den Grenzen 0 und u eingeschlossen sei. Schreibt man schliesslich für den Exponenten von e kurzweg t^2, so ergibt sich

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t e^{-t^2}dt$$

als Wahrscheinlichkeit für die Fehlergrenzen 0 und

$$2gt\sqrt{\frac{\varkappa''}{\varkappa}}\frac{\sqrt{[\alpha\alpha]}}{[\alpha a]}$$

in der erwähnten Bestimmung von x.

So lange nun diese Wahrscheinlichkeit dieselbe bleibt, bleibt es auch die obere Grenze t und das Fehlerintervall wird um so enger, je kleiner $g\sqrt{\frac{\varkappa''}{\varkappa}}\frac{\sqrt{[\alpha\alpha]}}{[\alpha a]}$ wird. Bleibt dagegen das Intervall unverändert, so wird die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler von x in dasselbe fällt, um so grösser, je grösser t, je kleiner also der eben genannte Ausdruck ist. Man hat also dasjenige System von Faktoren α_i zu wählen, für welches dieser Ausdruck, oder da $g, \varkappa, \varkappa''$ konstant sind, für welches

$$(10)\qquad \frac{\sqrt{[\alpha\alpha]}}{[\alpha a]}\ \text{ein Minimum}$$

wird.

Nach dieser Auffassung ist jener Wert der Unbekannten der vorteilhafteste, für welchen die Wahrscheinlichkeit, dass sein Fehler innerhalb bezeichneter Grenzen liegt, am grössten ist.

108. Laplace fasst aber den Gegenstand noch aus einem zweiten Gesichtspunkte auf und erklärt denjenigen Wert der Unbekannten für den vorteilhaftesten, für welchen sich der kleinste durchschnittliche Fehler ergibt, worunter in seinem Sinne der durchschnittliche Wert aller positiven

Werte von u zu verstehen ist*). Man erhält ihn, indem man das Element des Ausdrucks (9) mit u multipliziert und hierauf zwischen den Grenzen 0 und ∞ integriert; hiernach kommt er gleich

$$\frac{[\alpha a]}{2g\sqrt{\frac{\varkappa''}{\varkappa}\pi[\alpha\alpha]}}\int_0^\infty u e^{-\frac{\varkappa u^2[\alpha a]^2}{4g^2\varkappa''[\alpha\alpha]}} du = g\sqrt{\frac{\varkappa''}{\pi\varkappa}}\frac{\sqrt{[\alpha\alpha]}}{[\alpha a]},$$

und die Bedingung für sein Minimum ist dieselbe (10), wie oben, so dass beide Methoden zu dem nämlichen Resultate führen.

Indem man, um zu dem vorteilhaftesten Faktorensystem α_i zu gelangen, den Differentialquotienten von $\frac{\sqrt{[\alpha\alpha]}}{[\alpha a]}$ in Bezug auf α_i gleich Null setzt, ergibt sich

$$\alpha_i = \frac{[\alpha\alpha]}{[\alpha a]}a_i$$

oder weil der erste Faktor $\frac{[\alpha\alpha]}{[\alpha a]}$ sich mit i nicht ändert,

$$\alpha_i = Ma_i.$$

Man kann nun M immer so wählen, dass alle Faktoren α_i ganze Zahlen werden, wie es die Analyse vorausgesetzt hat.

Hiermit wird die vorteilhafteste Bestimmung von x

$$x = \frac{[al]}{[aa]}$$

dieselbe, wie sie sich aus der Bedingung

$$[\varepsilon\varepsilon] \text{ ein Minimum}$$

oder nach der Methode der kleinsten Quadrate ergeben hätte.

109. Aus einer sehr grossen Anzahl von Fehlergleichungen der allgemeinen Form

(1) $$\varepsilon_i = -l_i + a_i x + b_i y \qquad (i = 1, 2, \cdots n)$$

sind die vorteilhaftesten Werte der unbekannten Elemente x, y zu bestimmen.

---

*) Vgl. Art. 21. — Der hier gerechnete Betrag ist die Hälfte des durchschnittlichen Fehlers im üblichen Sinne und heisst bei Laplace „la valeur moyenne de l'erreur à craindre en plus“.

Man multipliziere, um hierzu geeignete Gleichungen zu erhalten, jede der Fehlergleichungen mit einer positiven oder negativen ganzen Zahl α_i und bilde die Summe

$$[\alpha\varepsilon] = -[\alpha l] + [\alpha a]x + [\alpha b]y,$$

verfahre dann ebenso mit einem zweiten System ganzzahliger Faktoren β_i, wodurch man die Gleichung

$$[\beta\varepsilon] = -[\beta l] + [\beta a]x + [\beta b]y$$

erhält.

Macht man die Annahme $E_\alpha = [\alpha\varepsilon] = 0$ und $E_\beta = [\beta\varepsilon] = 0$, so ergeben die beiden Gleichungen Werte für x und y; diese aber sind Fehlern unterworfen entsprechend denjenigen, mit welchen die gemachte Annahme selbst verbunden ist. Wären die Aggregate E_α, E_β, statt zu verschwinden, beziehungsweise gleich λ, μ, so wären die den eben besprochenen Bestimmungen von x und y anhaftenden Fehler u und v mit einander durch die Gleichungen verbunden

$$(2) \qquad \begin{aligned} \lambda &= [\alpha a]u + [\alpha b]v \\ \mu &= [\beta a]u + [\beta b]v. \end{aligned}$$

Dem Prinzipe gemäss, welches im vorigen Artikel aufgestellt worden ist, sind die Systeme der Faktoren α_i, β_i derart zu bestimmen, dass die durchschnittlichen Fehler von x und y möglichst klein werden.

Mit den im vorigen Artikel gebrauchten Bezeichnungen und unter den nämlichen Voraussetzungen sei

$$Q_i = \Sigma\varphi\left(\frac{\eta}{g}\right) e^{(\alpha_i\Theta + \beta_i\psi)\eta\sqrt{-1}},$$

die Summierung über alle möglichen Werte von η ausgedehnt; dann stellt in der Entwicklung des Produktes

$$Q_1 Q_2 \cdots Q_n$$

der Koeffizient von $e^{(\lambda\Theta+\mu\psi)\sqrt{-1}}$ die Wahrscheinlichkeit vor, dass gleichzeitig $E_\alpha = \lambda$ und $E_\beta = \mu$ sei. Um diesen Koeffizienten zu erhalten, hat man jenes Produkt mit

$$d\Theta d\psi e^{-(\lambda\Theta+\mu\psi)\sqrt{-1}}$$

zu multiplizieren und hierauf in Bezug auf Θ sowohl als in Bezug auf ψ zwischen den Grenzen $-\pi$ und $+\pi$ zu

integrieren. Dadurch ergibt sich für die erwähnte Wahrscheinlichkeit der Ausdruck

$$(3) \qquad \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Q_1 Q_2 \cdots Q_n e^{-(\lambda\Theta+\mu\psi)\sqrt{-1}} d\Theta\, d\psi.$$

Fasst man in Q_i die mit entgegengesetzt-gleichen η behafteten Glieder paarweise zusammen, so wird mit den in Art. 107 eingeführten Bezeichnungen

$$\begin{aligned} Q_i &= 2\Sigma\varphi\left(\frac{\eta}{g}\right)\cos(\alpha_i\Theta+\beta_i\psi)\eta \\ &= 2\Sigma\varphi\left(\frac{\eta}{g}\right)-(\alpha_i\Theta+\beta_i\psi)^2 g^2\Sigma\left(\frac{\eta}{g}\right)^2\varphi\left(\frac{\eta}{g}\right)+\cdots \\ &= g\varkappa-(\alpha_i\Theta+\beta_i\psi)^2 g^3\varkappa''+\cdots \\ &= g\varkappa\left(1-\frac{\varkappa''}{\varkappa}g^2(\alpha_i\Theta+\beta_i\psi)^2+\cdots\right) \end{aligned}$$

und berücksichtigt man, dass $g\varkappa = 1$ ist, so ergibt sich

$$l\cdot Q_i = -\frac{\varkappa''}{\varkappa}g^2(\alpha_i^2\Theta^2+2\alpha_i\beta_i\Theta\psi+\beta_i^2\psi^2)+\cdots.$$

Hiermit verwandelt sich der Ausdruck (3) in

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-\lambda\Theta\sqrt{-1}-\mu\psi\sqrt{-1}-\frac{\varkappa''}{\varkappa}g^2([\alpha\alpha]\Theta^2+2[\alpha\beta]\Theta\psi+[\beta\beta]\psi^2)} d\Theta\, d\psi.$$

Hier lassen sich diejenigen Glieder des Exponenten, welche Θ enthalten, zusammenfassen zu

$$\begin{aligned} &\frac{\varkappa''}{\varkappa}[\alpha\alpha]\left\{g\Theta+\frac{g[\alpha\beta]}{[\alpha\alpha]}\psi+\frac{\varkappa\lambda\sqrt{-1}}{2\varkappa'' g[\alpha\alpha]}\right\}^2 \\ &\qquad+\frac{\varkappa'' g^2[\alpha\beta]^2}{\varkappa[\alpha\alpha]}\psi^2+\frac{[\alpha\beta]\lambda\sqrt{-1}}{[\alpha\alpha]}\psi \\ &\qquad\qquad-\frac{\varkappa\lambda^2}{4\varkappa'' g^2[\alpha\alpha]}; \end{aligned}$$

hierauf vereinigen sich diejenigen Glieder, welche nur ψ enthalten, zu

$$\begin{aligned} &-\frac{\varkappa''}{\varkappa}\frac{[\alpha\alpha][\beta\beta]-[\alpha\beta]^2}{[\alpha\alpha]}\left\{g\psi-\frac{\varkappa}{2\varkappa'' g}\frac{[\alpha\beta]\lambda-[\alpha\alpha]\mu}{[\alpha\alpha][\beta\beta]-[\alpha\beta]^2}\sqrt{-1}\right\}^2 \\ &\qquad-\frac{\varkappa}{4\varkappa'' g^2}\frac{([\alpha\beta]\lambda-[\alpha\alpha]\mu)^2}{[\alpha\alpha]([\alpha\alpha][\beta\beta]-[\alpha\beta]^2)}. \end{aligned}$$

Macht man also die Substitution

$$t = g\Theta + \frac{g[\alpha\beta]}{[\alpha\alpha]}\psi + \frac{\varkappa\lambda\sqrt{-1}}{2\varkappa'' g[\alpha\alpha]}$$

$$t' = g\psi - \frac{\varkappa}{2\varkappa'' g}\,\frac{[\alpha\beta]\lambda - [\alpha\alpha]\mu}{[\alpha\alpha][\beta\beta] - [\alpha\beta]^2}\sqrt{-1},$$

deren Determinante g^2 ist, so verwandelt sich, da man aus ähnlichen Gründen, wie sie in Art. 107 entwickelt worden sind, die Grenzen der Integrationen in Bezug auf die neuen Variabeln t, t' bis $-\infty$ und $+\infty$ erstrecken kann, der frühere Ausdruck in

$$(4)\quad \begin{aligned} &\frac{1}{4\pi^2 g^2} e^{-\frac{\varkappa}{4\varkappa'' g^2 R}([\beta\beta]\lambda^2 - 2[\alpha\beta]\lambda\mu + [\alpha\alpha]\mu^2)} \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\varkappa''[\alpha\alpha]}{\varkappa}t^2 - \frac{\varkappa'' R}{\varkappa[\alpha\alpha]}t'^2}\, dt\, dt' \\ &= \frac{\varkappa}{4\pi\varkappa'' g^2\sqrt{R}}\, e^{-\frac{\varkappa}{4\varkappa'' g^2}\,\frac{[\beta\beta]\lambda^2 - 2[\alpha\beta]\lambda\mu + [\alpha\alpha]\mu^2}{R}}, \end{aligned}$$

wenn abkürzungsweise

$$(5)\qquad [\alpha\alpha][\beta\beta] - [\alpha\beta]^2 = R$$

gesetzt wird. Wie man bemerkt, ist R die Determinante der quadratischen Form in λ, μ, welche im Exponenten des letzten Ausdruckes als Zähler auftritt.

In den mit $d\lambda\, d\mu$ multiplizierten Ausdruck (4) hat man mittelst der Gleichungen (2) u, v an die Stelle von λ, μ zu bringen, um die Wahrscheinlichkeit einer Wertverbindung u, v der Fehler in den Bestimmungen für x, y zu erhalten. Die Determinante der Substitution (2) ist

$$(6)\qquad \varDelta = [\alpha a][\beta b] - [\alpha b][\beta a]$$

und der Zähler des Exponenten von e verwandelt sich durch diese Substitution in

$$Fu^2 + 2Guv + Hv^2,$$

wobei

$$(7)\quad \begin{aligned} F &= [\alpha a]^2[\beta\beta] - 2[\alpha a][\beta a][\alpha\beta] + [\beta a]^2[\alpha\alpha] \\ G &= [\alpha a][\alpha b][\beta\beta] - ([\alpha a][\beta b] + [\alpha b][\beta a])[\alpha\beta] \\ &\qquad + [\beta a][\beta b][\alpha\alpha] \\ H &= [\alpha b]^2[\beta\beta] - 2[\alpha b][\beta b][\alpha\beta] + [\beta b]^2[\alpha\alpha]. \end{aligned}$$

Mithin ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Fehler in x, y zwischen den bezüglichen Grenzen u und $u + du$, v und $v + dv$ eingeschlossen sind,

$$(8) \qquad \frac{\varkappa}{4\pi\varkappa'' g^2} \frac{\varDelta}{\sqrt{R}} e^{-\frac{\varkappa(Fu^2+2Guv+Hv^2)}{4\varkappa'' g^2 R}} du\, dv.$$

Integriert man dieselbe in Bezug auf v zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$, so ergibt sich die Wahrscheinlichkeit eines Betrages u unabhängig von dem Werte des v. Zum Zwecke der Ausführung dieser Integration bemerke man, dass

$$Hv^2 + 2Guv + Fu^2 = H\left(v + \frac{G}{H}u\right)^2 + \frac{FH - G^2}{H} u^2$$

und setze

$$\sqrt{\frac{\varkappa H}{4\varkappa''}} \frac{v + \frac{G}{H}u}{g\sqrt{R}} = t;$$

es wird dann die zuletzt erwähnte Wahrscheinlichkeit gleich

$$\sqrt{\frac{\varkappa}{4\varkappa''}} \frac{\varDelta}{\pi g\sqrt{H}} du e^{-\frac{\varkappa}{4\varkappa'' g^2 R} \frac{FH-G^2}{H} u^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt$$

$$= \sqrt{\frac{\varkappa}{4\pi\varkappa''}} \frac{\varDelta}{g\sqrt{H}} e^{-\frac{\varkappa}{4\varkappa'' g^2 R} \frac{FH-G^2}{H} u^2} du.$$

Dies vereinfacht sich noch infolge der Bemerkung, dass zwischen den Determinanten R und $FH - G^2$ der beiden quadratischen Formen in λ, μ, beziehungsweise u, v und der Determinante $\varDelta$ der Substitution (2), durch welche die erste dieser Formen in die zweite übergeführt worden ist, die Relation $\frac{FH - G^2}{R} = \varDelta^2$ besteht*); der Ausdruck lautet daher schliesslich

$$\frac{\varDelta}{g} \sqrt{\frac{\varkappa}{4\pi\varkappa'' H}} e^{-\frac{\varkappa\varDelta^2}{4\varkappa'' g^2 H} u^2} du.$$

Multipliziert man u mit dieser Wahrscheinlichkeit und integriert das Produkt zwischen den Grenzen 0 und ∞, so ergibt sich

---

*) Baltzer, Det., 5. Aufl., pag. 175.

(9) $$\frac{g\sqrt{H}}{\Delta\sqrt{\pi\frac{\varkappa''}{\varkappa}}}$$

als durchschnittlicher Fehler in der Bestimmung des ersten Elementes, und es sind die Faktoren α_i, β_i derart zu bestimmen, dass dieser Fehler oder, was dasselbe ist, dass $\frac{\sqrt{H}}{\Delta}$ ein Minimum werde.

Nun ist

$$\frac{\partial\left(l\cdot\frac{\sqrt{H}}{\Delta}\right)}{\partial\alpha_i}$$

$$=\frac{-a_i[\beta b]+b_i[\beta a]}{\Delta}+\frac{b_i[\alpha b][\beta\beta]-b_i[\beta b][\alpha\beta]-\beta_i[\alpha b][\beta b]+\alpha_i[\beta b]^2}{H}$$

und man überzeugt sich leicht, dass dieser Ausdruck durch die Substitutionen

(10) $$\alpha_i = Ma_i, \qquad \beta_i = Mb_i$$

auf Null gebracht wird, wo M eine willkürliche von i unabhängige Zahl ist, die man immer so wählen kann, dass alle α_i und alle β_i ganze Zahlen werden, wie es die Analyse voraussetzt. Denn bei dieser Bestimmung der Faktoren verwandelt sich

$$\Delta \text{ in } M^2\{[aa][bb]-[ab]^2\} = M^2\Delta',$$
$$H \text{ in } M^4\{[aa][bb]-[ab]^2\}[bb] = M^4\Delta'[bb],$$

mithin der erste Teil des Differentialquotienten in

$$\frac{1}{M\Delta'}\{-a_i[bb]+b_i[ab]\}$$

und der zweite Teil in

$$\frac{1}{M\Delta'}\{-b_i[ab]+a_i[bb]\},$$

womit die Behauptung erwiesen ist*).

Unter denselben Bedingungen verschwindet auch der Differentialquotient in Bezug auf b_i und auf dieselbe Weise erkennt man, dass dann auch der durchschnittliche Fehler

*) Der obige Differentialquotient verschwindet auch für die Annahme $\alpha_i = Mb_i$, $\beta_i = Ma_i$, deren weitere Verfolgung aber zu den nämlichen Resultaten führt.

des zweiten Elements ein Minimum wird, welcher aus dem Ausdrucke (9) durch Vertauschung von H mit F hervorgeht, wie man aus der quadratischen Form

$$Fu^2 + 2Guv + Hv^2$$

unmittelbar ersieht.

Die Gleichungen also, welche die vorteilhaftesten Werte der beiden Elemente ergeben, sind

$$[aa]x + [ab]y = [al]$$
$$[ba]x + [bb]y = [bl],$$

dieselben, zu welchen die Bedingungen $[\varepsilon\varepsilon]$ ein Minimum oder die Methode der kleinsten Quadrate führt.

110. Durch diese Untersuchungen ist also erwiesen, dass unter allen linearen Kombinationen, welche man mit den Fehlergleichungen vornehmen kann, diejenige, welche man als Methode der kleinsten Quadrate bezeichnet, die vorteilhafteste ist in dem Sinne, als sie für die Elemente Werte liefert, bei denen die kleinstmöglichen durchschnittlichen Fehler zu befürchten sind, und zwar ohne Rücksicht auf die Form des Gesetzes, welchem der Fehler der einzelnen Beobachtung unterworfen ist.

Dieses Resultat ist jedoch unter mehrfachen Einschränkungen zu Stande gekommen. Zunächst wird es nur für den Fall eines und zweier Elemente nachgewiesen, und wenn auch Laplace am Schlusse bemerkt, es folge aus seinen Darlegungen, dass die Methode der kleinsten Quadrate allgemein gelte, welches auch die Anzahl der zu bestimmenden Elemente sei: „car il est visible que l'analyse précédente peut s'étendre à un nombre quelconque d'éléments", so wird man diesem Ausspruche bei der Kompliziertheit der Analyse und dem Mangel an Symmetrie nur wenig Vertrauen entgegenbringen.

Desgleichen bedeuten die Voraussetzungen, dass das Fehlergesetz für alle Beobachtungen das nämliche sei und der Bedingung $\varphi(-x) = \varphi(x)$ genüge, eine Einschränkung, welche eine Verallgemeinerung der Analyse erheischt. Hierzu kommt noch das Bedürfnis, über die Zulässigkeit der angewandten Approximationen Klarheit zu gewinnen.

In zwei wertvollen Abhandlungen „Sur la Probabilité des résultats moyens des Observations", welche Poisson*) nach den einleitenden Bemerkungen gewissermaassen als Kommentar zu den Untersuchungen von Laplace gegeben, ist die Methode des letzteren wesentlich verallgemeinert, soweit es die über das Fehlergesetz getroffenen Annahmen anlangt: Poisson macht weder die Voraussetzung, dass dieses Gesetz für alle Beobachtungen eins und dasselbe sei, noch dass es die Eigenschaft einer geraden Funktion besitze. Er beschränkt sich aber blos auf den Fall eines zu bestimmenden Elementes. Seine Analyse lehnt sich an die Laplace'sche an; insbesondere macht er ebenfalls die Annahme, dass alle Werte, deren ein Fehler fähig ist, Vielfache eines sehr kleinen Betrages seien; dadurch wird der kombinatorische Charakter der Analyse aufrecht erhalten.

Einen wesentlichen Fortschritt und gewissermaassen einen Abschluss in der Entwicklung der Laplace'schen Methode bedeuten die sehr wertvollen Arbeiten von Ellis**) und Glaisher***). Während der erstere durch eine neue Auffassung die Methode auf beliebig viele Elemente ausgedehnt und den wahrscheinlichkeitstheoretischen Teil der Analyse auf moderne Hilfsmittel, nämlich auf das Doppelintegral des Fourier'schen Theorems gestellt hat, ist dieser Teil durch Glaisher weiter vereinfacht worden, indem an die Stelle jenes Doppelintegrals ein von Lejeune-Dirichlet in Form eines einfachen bestimmten Integrals dargestellter Diskontinuitätsfaktor getreten ist. Ellis hält noch an der Voraussetzung fest, dass die Funktion φ gerade sei; Glaisher hat auch sie fallen lassen, so dass seinem Resultat die Allgemeinheit des Poisson'schen zukommt. Überdies haben die drei

*) Connaissance des Tems pour l'an 1827 et pour l'an 1832. — In deutscher Übertragung finden sich diese Abhandlungen im dritten Anhang von Dr. Schnuse's Übersetzung von Poisson's „Recherches sur la Probab. des jugemens en matière criminelle et en matière civile etc.". Paris 1837. — Vgl. auch Todhunter, History of the Mathem. Theory of Probab., Cambridge and London 1865, pag. 561 flg.

**) Cambridge Philos. Transact., VIII, pag. 204—219.

***) Mem. of the R. Astron. Soc., XXXIX, pag. 92—107.

genannten Geometer der Zulässigkeit der Approximationen ihre Aufmerksamkeit zugewendet.

Die hier genannten Arbeiten sind bei Abfassung der folgenden Artikel benutzt worden*).

111. Aus einer sehr grossen Anzahl n von Fehlergleichungen der allgemeinen Form

(1) $$\varepsilon_i = -l_i + a_i x + b_i y + c_i z + \cdots \quad (i = 1, 2, \cdots n)$$

sind die vorteilhaftesten Werte der m $(< n)$ Elemente $x, y, z, \ldots$ zu bestimmen.

Man multipliziere jede Fehlergleichung mit einer positiven oder negativen Zahl α_i und bilde die Summe

(2) $$[\alpha\varepsilon] = -[\alpha l] + [\alpha a]x + [\alpha b]y + [\alpha c]z + \cdots.$$

Unterwirft man die n Faktoren α_i den m Bedingungsgleichungen

(3) $$[\alpha a] = 1, \quad [\alpha b] = 0, \quad [\alpha c] = 0, \quad \cdots$$

so ergibt sich für x die Bestimmung

(4) $$x = [\alpha l] + [\alpha\varepsilon].$$

Es handelt sich jetzt um die Wahrscheinlichkeit, dass der Wert von $[\alpha\varepsilon]$ zwischen gegebenen Grenzen enthalten sei. Mit der Erledigung dieser Frage beschäftigen sich die beiden nun folgenden Artikel.

112. Bezeichnet $\varphi_i(\varepsilon_i)d\varepsilon_i$ die Wahrscheinlichkeit, dass der i^{ten} Beobachtung ein Fehler im Betrage ε_i anhafte, so ist

$$\varphi_1(\varepsilon_1)\varphi_2(\varepsilon_2)\ldots\varphi_n(\varepsilon_n)d\varepsilon_1 d\varepsilon_2 \ldots d\varepsilon_n$$

die Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen der Fehler

---

*) Mit der Ausdehnung der Laplace'schen Methode auf eine beliebige Anzahl von Beobachtungen beschäftigt sich auch eine ausführliche Abhandlung von Dienger: „Die Laplace'sche Methode der Ausgleichung von Beobachtungsfehlern bei zahlreichen Beobachtungen", Denkschr. der k. Akad. in Wien, XXXIV, 2. Abt., pag. 21 flg. Der wahrscheinlichkeitstheoretische Teil der Analyse schliesst sich an Poisson an und es wird nur von Laplace's erstem Verfahren (s. Art. 107) Gebrauch gemacht. Von den oben genannten wird jedoch diese Arbeit an Einfachheit und Klarheit weit übertroffen.

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ in den n Beobachtungen. Die Wahrscheinlichkeit, dass diese Fehler der Bedingung

$$-1 \leqq \eta \leqq +1$$

Genüge leisten, wobei η irgend eine Funktion von $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ ist, wird sich durch das Integral

$$\int\int\cdots\int \varphi_1(\varepsilon_1)\varphi_2(\varepsilon_2)\cdots\varphi_n(\varepsilon_n)d\varepsilon_1 d\varepsilon_2\cdots d\varepsilon_n$$

ausdrücken, wenn man dasselbe über das durch die obige Bedingung gekennzeichnete Gebiet ausdehnt.

Die Grenzen der einzelnen Integrationen können aber von diesem Gebiet unabhängig gemacht werden, wenn man einen Diskontinuitätsfaktor einführt, welcher die Eigenschaft besitzt, gleich Eins zu sein, wenn $|\eta| < 1$, und zu verschwinden, wenn $|\eta| > 1$. Ein solcher bietet sich in dem von Lejeune-Dirichlet eingeführten Integral

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\sin\Theta\cos\eta\Theta}{\Theta}\,d\Theta$$

dar.

Soll im Besonderen die Wahrscheinlichkeit bestimmt werden, dass

$$g - \lambda \leqq [\alpha\varepsilon] \leqq g + \lambda \tag{5}$$

oder dass

$$-1 \leqq \frac{[\alpha\varepsilon] - g}{\lambda} \leqq +1$$

ist, so tritt $\frac{[\alpha\varepsilon]-g}{\lambda}$ an die Stelle von η und wenn man Kürze halber $\frac{\Theta}{\lambda}$ durch Θ ersetzt, so wird

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\sin\lambda\Theta\cos([\alpha\varepsilon]-g)\Theta}{\Theta}\,d\Theta$$

der diesem Fall entsprechende Diskontinuitätsfaktor, somit

$$\begin{aligned}P = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty\int\limits_{-\infty}^\infty\cdots\int\limits_{-\infty}^\infty \varphi_1(\varepsilon_1)\varphi_2(\varepsilon_2)\cdots\varphi_n(\varepsilon_n)\\ \cdot\frac{\sin\lambda\Theta}{}\,\frac{\cos([\alpha\varepsilon]-g)\Theta}{\Theta}\,d\Theta\,d\varepsilon_1\cdots d\varepsilon_n\end{aligned} \tag{6}$$

die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Bedingung (5) erfüllt sei.

Bringt man an die Stelle von $\cos([\alpha\varepsilon] - g)\Theta$ die Exponentialgrösse $e^{([\alpha\varepsilon]-g)\Theta\sqrt{-1}}$, deren reellen Anteil jener Cosinus darstellt, so kommt

$$(7) \qquad P = \Re\left\{\frac{2}{\pi}\int_0^\infty Q_1 Q_2 \cdots Q_n \frac{\sin\lambda\Theta}{\Theta} e^{-g\Theta\sqrt{-1}}\, d\Theta\right\},$$

worin

$$(8) \qquad Q_i = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_i(\varepsilon_i) e^{\alpha_i\varepsilon_i\Theta\sqrt{-1}}\, d\varepsilon_i.$$

Setzt man

$$(9) \qquad \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_i(\varepsilon_i) \cos\alpha_i\varepsilon_i\Theta\, d\varepsilon_i &= \varrho_i \cos\nu_i \\ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_i(\varepsilon_i) \sin\alpha_i\varepsilon_i\Theta\, d\varepsilon_i &= \varrho_i \sin\nu_i, \end{aligned}$$

so wird

$$Q_i = \varrho_i e^{\nu_i\sqrt{-1}}$$

und

$$Q_1 Q_2 \cdots Q_n = Y e^{\sigma\sqrt{-1}},$$

wenn zu weiterer Abkürzung

$$Y = \varrho_1 \varrho_2 \cdots \varrho_n$$

$$\sigma = \nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_n$$

gesetzt wird.

Hiermit verwandelt sich die rechte Seite von (7) in

$$\Re\left\{\frac{2}{\pi}\int_0^\infty Y \frac{\sin\lambda\Theta}{\Theta} e^{(\sigma-g\Theta)\sqrt{-1}}\, d\Theta\right\}$$

und man bekommt die wesentlich vereinfachte Darstellung

$$P = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty Y\cos(\sigma - g\Theta)\frac{\sin\lambda\Theta}{\Theta}\, d\Theta$$

oder*)

$$(10)\qquad P = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_{-\lambda}^{\lambda} Y \cos(\sigma - g\Theta + \psi\Theta)\, d\Theta\, d\psi.$$

113. Bis hierher war die Analyse exakt und unabhängig von der Anzahl n der Beobachtungen. Nun handelt es sich darum, einen Näherungswert für P zu bestimmen unter der Voraussetzung, dass n eine sehr grosse Zahl ist.

Zunächst lässt sich zeigen, dass alle ϱ_i, welche für $\Theta = 0$ auf die Einheit sich reduzieren, für jeden von Null verschiedenen Wert von Θ echte Brüche sind. Denn aus den Gleichungen (9) folgt

$$\varrho_i^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_i(\varepsilon_i)\cos\alpha_i\varepsilon_i\Theta\, d\varepsilon_i\right)^2 + \left(\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_i(\varepsilon_i)\sin\alpha_i\varepsilon_i\Theta\, d\varepsilon_i\right)^2$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_i(\varepsilon_i)\varphi_i(\varepsilon_i')\cos\alpha_i\varepsilon_i\Theta\cos\alpha_i\varepsilon_i'\Theta\, d\varepsilon_i\, d\varepsilon_i'$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_i(\varepsilon_i)\varphi_i(\varepsilon_i')\sin\alpha_i\varepsilon_i\Theta\sin\alpha_i\varepsilon_i'\Theta\, d\varepsilon_i\, d\varepsilon_i'$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_i(\varepsilon_i)\varphi_i(\varepsilon_i')\cos\alpha_i(\varepsilon_i - \varepsilon_i')\Theta\, d\varepsilon_i\, d\varepsilon_i'$$

und dies ist kleiner als

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_i(\varepsilon_i)\varphi_i(\varepsilon_i')\, d\varepsilon_i\, d\varepsilon_i' = 1.$$

---

*) Es ist nämlich $\frac{\sin\lambda\Theta}{\Theta} = \frac{1}{2}\int_{-\lambda}^{\lambda}\cos\psi\Theta\, d\psi$, daher

$$\cos(\sigma - g\Theta)\frac{\sin\lambda\Theta}{\Theta} = \frac{1}{2}\int_{-\lambda}^{\lambda}\cos(\sigma - g\Theta)\cos\psi\Theta\, d\psi = \frac{1}{2}\int_{-\lambda}^{\lambda}\cos(\sigma - g\Theta + \psi\Theta)\, d\psi,$$

weil $\int_{-\lambda}^{\lambda}\sin(\sigma - g\Theta)\sin\psi\Theta\, d\psi = 0$ ist. — Dieses Resultat (10) findet sich bei Poisson, l. c., 1827, pag. 286.

Bezeichnet demnach ϱ den grössten unter den Werten, welche die verschiedenen ϱ_i für einen gegebenen Wert von Θ annehmen, so ist $Y < \varrho^n$; daraus schliesst man, dass Y eine sehr kleine Grösse vorstellt, ausgenommen den Fall, dass Θ selbst sehr klein ist. Unter der letzteren Voraussetzung haben wir also einen Näherungswert für Y zu suchen.

Durch Entwicklung der trigonometrischen Funktionen unter dem Integralzeichen in (9) in Reihen ergibt sich, wenn man bei der zweiten Potenz von Θ stehen bleibt und von den Abkürzungen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_i \varphi_i(\varepsilon_i) d\varepsilon_i = k_i'$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_i^2 \varphi_i(\varepsilon_i) d\varepsilon_i = k_i''$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

Gebrauch macht,

$$\text{(11)} \qquad \begin{aligned} \varrho_i \cos \nu_i &= 1 - \frac{1}{2} \alpha_i^2 k_i'' \Theta^2 + \cdots \\ \varrho_i \sin \nu_i &= \alpha_i k_i' \Theta - \cdots, \end{aligned}$$

weil $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_i(\varepsilon_i) d\varepsilon_i = 1$ ist; hieraus folgt

$$\varrho_i^2 = 1 - \alpha_i^2 (k_i'' - k_i'^2) \Theta^2 + \cdots$$

und

$$\varrho_i = 1 - \frac{1}{2} \alpha_i^2 (k_i'' - k_i'^2) \Theta^2 + \cdots,$$

und mit der Abkürzung*)

*) Dass $k_i'' - k_i'^2$ thatsächlich positiv ist, wird leicht erkannt, wenn man k_i'' und $k_i'^2$ in folgender Form schreibt:

$$k_i'' = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_i^2 \varphi_i(\varepsilon_i) \varphi_i(\varepsilon_i') d\varepsilon_i d\varepsilon_i' + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_i'^2 \varphi_i(\varepsilon_i') \varphi_i(\varepsilon_i) d\varepsilon_i' d\varepsilon_i,$$

$$k_i'^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_i \varepsilon_i' \varphi_i(\varepsilon_i) \varphi_i(\varepsilon_i') d\varepsilon_i d\varepsilon_i';$$

durch Subtraktion und Multiplikation mit 2 entsteht

$$2(k_i'' - k_i'^2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (\varepsilon_i - \varepsilon_i')^2 \varphi_i(\varepsilon_i) \varphi_i(\varepsilon_i') d\varepsilon_i d\varepsilon_i'$$

und dies ist eine wesentlich positive Grösse.

(12) $$\frac{1}{2}(k_i'' - k_i'^2) = \chi_i^2$$

wird

$$l \,.\, \varrho_i = -\alpha_i^2 \chi_i^2 \Theta^2 + \cdots,$$

folglich ist näherungsweise

$$Y = \varrho_1 \varrho_2 \cdots \varrho_n = e^{-[\alpha^2 \chi^2]\Theta^2}.$$

Mit demselben Grade der Annäherung folgt aus der zweiten der Gleichungen (11)

$$\nu_i = \alpha_i k_i' \Theta - \cdots$$

und

$$\sigma = \nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_n = [\alpha k']\Theta.$$

Setzt man die Näherungswerte für Y und σ in den Ausdruck (10) ein, so kommt

$$P = \frac{1}{\pi} \int_{-\lambda}^{\lambda} d\psi \int_0^{\infty} e^{-[\alpha^2 \chi^2]\Theta^2} \cos([\alpha k'] - g + \psi)\Theta d\Theta;$$

die Integration in Bezug auf Θ gibt (s. Anmerkg. zu Art. 38)

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{[\alpha^2 \chi^2]}} e^{-\frac{([\alpha k'] - g + \psi)^2}{4[\alpha^2 \chi^2]}},$$

demnach ist

(13) $$P = \frac{1}{2\sqrt{\pi[\alpha^2 \chi^2]}} \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-\frac{([\alpha k'] - g + \psi)^2}{4[\alpha^2 \chi^2]}} d\psi$$

die Wahrscheinlichkeit, dass das Aggregat $[\alpha\varepsilon]$ zwischen den Grenzen $g - \lambda$ und $g + \lambda$ eingeschlossen sei.

Für einen festgesetzten Wert von λ wird P am grössten, wenn $g = [\alpha k']$ genommen wird. Denn es ist

$$\frac{dP}{dg} = \frac{1}{2\sqrt{\pi[\alpha^2 \chi^2]}} \int_{\psi=-\lambda}^{\psi=\lambda} e^{-\frac{([\alpha k'] - g + \psi)^2}{4[\alpha^2 \chi^2]}} d_\psi \left\{\frac{([\alpha k'] - g + \psi)^2}{4[\alpha^2 \chi^2]}\right\}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi[\alpha^2 \chi^2]}} \left(e^{-\frac{([\alpha k'] - g + \lambda)^2}{4[\alpha^2 \chi^2]}} - e^{-\frac{([\alpha k'] - g - \lambda)^2}{4[\alpha^2 \chi^2]}} \right)$$

und dies verschwindet, wenn $g = [\alpha k']$ wird.

114. Wir kehren nun zu der uns vorliegenden Aufgabe (s. Art. 111) zurück und führen sie erst unter der Annahme zu Ende, dass positive und negative Fehler gleichen Betrages gleich wahrscheinlich seien. Dann ist

$$k_i' = 0, \qquad \chi_i^2 = \frac{1}{2} k_i''$$

und nimmt man $g = [\alpha k'] = 0$ an, so wird

$$(14) \qquad P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\lambda}{\sqrt{2[\alpha^2 k'']}}} e^{-t^2}\, dt$$

die Wahrscheinlichkeit, dass $-\lambda < [\alpha\varepsilon] < \lambda$.

Wenn man demnach in der Gleichung (4), Art. 111, für $[\alpha\varepsilon]$ Null nimmt, so wird

$$(15) \qquad x = [\alpha l]$$

und der Fehler u in dieser Bestimmung ist unmittelbar durch $[\alpha\varepsilon]$ bezeichnet, so dass (14) auch die Wahrscheinlichkeit angibt, es sei $|u| < \lambda$.

Bei konstant bleibendem Intervall 2λ wird P am grössten, wenn $[\alpha^2 k'']$ am kleinsten wird; umgekehrt fällt bei gegebenem P das Intervall 2λ um so kleiner aus, je kleiner $[\alpha^2 k'']$ ist. Nach der ersten Laplace'schen Methode ist also jenes System von Faktoren α_i das vorteilhafteste, für welches

$[\alpha^2 k'']$ ein Minimum.

Andererseits folgt aus der Gleichung (14) für die Wahrscheinlichkeit eines zwischen u und $u + du$ liegenden Fehlers in der Bestimmung (15) der Ausdruck

$$\varphi(u)du = \frac{1}{\sqrt{2\pi[\alpha^2 k'']}}\, e^{-\frac{u^2}{2[\alpha^2 k'']}}\, du;$$

daraus ergibt sich der durchschnittliche Fehler jener Bestimmung

$$\int_0^\infty u\varphi(u)\,du = \sqrt{\frac{[\alpha^2 k'']}{2\pi}};$$

derselbe wird zugleich mit $[\alpha^2 k'']$ ein Kleinstes. Also auch

nach der zweiten Laplace'schen Methode ist das vorteilhafteste Fehlersystem aus der Bedingung

(16) $[\alpha^2 k'']$ ein Minimum

zu bestimmen.

Zu dieser Forderung treten die anfangs aufgestellten Bedingungen

(3) $[\alpha a] = 1, \quad [\alpha b] = 0, \quad [\alpha c] = 0, \quad \cdots$

hinzu. Es ist also die mittels der unbestimmten Multiplikatoren $q_1, q_2, q_3, \ldots$ gebildete Funktion

$$[\alpha^2 k''] - 2q_1([\alpha a] - 1) - 2q_2[\alpha b] - 2q_3[\alpha c] - \cdots$$

durch Wahl der α_i zu einem absoluten Minimum zu machen. Dies führt auf die Gleichungen

$$(17) \quad \begin{aligned} k_1''\alpha_1 &= q_1 a_1 + q_2 b_1 + q_3 c_1 + \cdots \\ k_2''\alpha_2 &= q_1 a_2 + q_2 b_2 + q_3 c_2 + \cdots \\ k_3''\alpha_3 &= q_1 a_3 + q_2 b_3 + q_3 c_3 + \cdots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

multipliziert man diese der Reihe nach zuerst mit

$$\frac{a_1}{k_1''}, \frac{a_2}{k_2''}, \frac{a_3}{k_3''}, \ldots,$$

dann mit

$$\frac{b_1}{k_1''}, \frac{b_2}{k_2''}, \frac{b_3}{k_3''}, \ldots,$$

dann mit

$$\frac{c_1}{k_1''}, \frac{c_2}{k_2''}, \frac{c_3}{k_3''}, \ldots \text{ u. s. w.}$$

und bildet jedesmal die Summe, so ergibt sich wegen (3) das Gleichungssystem

$$(18) \quad \begin{aligned} 1 &= \left[\frac{aa}{k''}\right] q_1 + \left[\frac{ab}{k''}\right] q_2 + \left[\frac{ac}{k''}\right] q_3 + \cdots \\ 0 &= \left[\frac{ba}{k''}\right] q_1 + \left[\frac{bb}{k''}\right] q_2 + \left[\frac{bc}{k''}\right] q_3 + \cdots \\ 0 &= \left[\frac{ca}{k''}\right] q_1 + \left[\frac{cb}{k''}\right] q_2 + \left[\frac{cc}{k''}\right] q_3 + \cdots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Die Koeffizienten mögen abgekürzt mit

$$\begin{matrix} \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{a}_3 & \ldots \\ \mathfrak{b}_1 & \mathfrak{b}_2 & \mathfrak{b}_3 & \ldots \\ \mathfrak{c}_1 & \mathfrak{c}_2 & \mathfrak{c}_3 & \ldots \\ \ldots & & & \end{matrix}$$

bezeichnet werden ($\mathfrak{a}_2 = \mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{a}_3 = \mathfrak{c}_1$, $\cdots$); die Determinante ihres Systems sei R, die Adjunkten der Elemente der ersten Zeile seien $A_1, A_2, A_3, \ldots$; dann ist

$$Rq_1 = A_1, \quad Rq_2 = A_2, \quad Rq_3 = A_3, \quad \cdots$$

und aus (17) folgt mit diesen Bestimmungen von $q_1, q_2, q_3 \ldots$

$$\begin{aligned} R\alpha_1 &= \frac{a_1}{k_1''} A_1 + \frac{b_1}{k_1''} A_2 + \frac{c_1}{k_1''} A_3 + \cdots \\ R\alpha_2 &= \frac{a_2}{k_2''} A_1 + \frac{b_2}{k_2''} A_2 + \frac{c_2}{k_2''} A_3 + \cdots \\ R\alpha_3 &= \frac{a_3}{k_3''} A_1 + \frac{b_3}{k_3''} A_2 + \frac{c_3}{k_3''} A_3 + \cdots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{19}$$

Multipliziert man diese Gleichungen der Reihe nach mit $l_1, l_2, l_3, \ldots$, so wird vermöge der Gleichung (15)

$$Rx = \left[\frac{a\,l}{k''}\right] A_1 + \left[\frac{b\,l}{k''}\right] A_2 + \left[\frac{c\,l}{k''}\right] A_4 + \cdots. \tag{20}$$

Man überblickt sehr leicht, dass sich die Analyse in keinem wesentlichen Punkte ändert, wenn es sich statt um x um $y, z, \ldots$ handelt, und dass sich die hierzu führenden Gleichungen ergeben, wenn man an die Stelle von $A_1, A_2, A_3 \ldots$ die Adjunkten $B_1, B_2, B_3 \ldots, C_1, C_2, C_3, \ldots$ der Elemente der zweiten, dritten, ... Zeile von R setzt, so dass

$$\begin{aligned} Ry &= \left[\frac{al}{k''}\right] B_1 + \left[\frac{b\,l}{k''}\right] B_2 + \left[\frac{cl}{k''}\right] B_3 + \cdots \\ Rz &= \left[\frac{al}{k''}\right] C_1 + \left[\frac{b\,l}{k''}\right] C_2 + \left[\frac{cl}{k''}\right] C_3 + \cdots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{20*}$$

d. h., es sind $x, y, z, \ldots$ die Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_1 x + \mathfrak{a}_2 y + \mathfrak{a}_3 z + \cdots &= \left[\frac{al}{k''}\right] \\ \mathfrak{b}_1 x + \mathfrak{b}_2 y + \mathfrak{b}_3 z + \cdots &= \left[\frac{b\,l}{k''}\right] \\ \mathfrak{c}_1 x + \mathfrak{c}_2 y + \mathfrak{c}_3 z + \cdots &= \left[\frac{cl}{k''}\right] \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{21}$$

Es ergeben sich also die vorteilhaftesten Werte der Elemente aus dem Gleichungssystem

$$
(22)\qquad
\begin{aligned}
\left[\frac{aa}{k''}\right]x + \left[\frac{ab}{k''}\right]y + \left[\frac{ac}{k''}\right]z + \cdots &= \left[\frac{al}{k''}\right]\\
\left[\frac{ba}{k''}\right]x + \left[\frac{bb}{k''}\right]y + \left[\frac{bc}{k''}\right]z + \cdots &= \left[\frac{bl}{k''}\right]\\
\left[\frac{ca}{k''}\right]x + \left[\frac{cb}{k''}\right]y + \left[\frac{cc}{k''}\right]z + \cdots &= \left[\frac{cl}{k''}\right]\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

Diese Gleichungen sind aber dieselben, wie diejenigen, welche aus der Bedingung

$$\left[\frac{\varepsilon\varepsilon}{k''}\right] \text{ ein Minimum}$$

hervorgehen, wornach die Summe der mit den Grössen $\frac{1}{k_1''}, \frac{1}{k_2''}, \frac{1}{k_3''} \cdots$ multiplizierten Fehlerquadrate ein Kleinstes werden soll. Dies die Modifikation, welche die Methode der kleinsten Quadrate unter den gegenwärtigen Voraussetzungen erfährt.

115. Um den allgemeinsten Fall zu erledigen, setzen wir in der Gleichung (13), Art. 113,

$$g = [\alpha k']$$

und erhalten

$$(23)\qquad P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\lambda}{2\sqrt{[\alpha^2\chi^2]}}} e^{-t^2}\, dt$$

als Wahrscheinlichkeit dafür, dass $[\alpha k'] - \lambda \leq [\alpha\varepsilon] \leq [\alpha k'] + \lambda$ ist. Wenn man daher in der Gleichung (4), Art. 111, $[\alpha k']$ an die Stelle von $[\alpha\varepsilon]$ treten lässt und den Fehler der so gewonnenen Bestimmung

$$(24)\qquad x = [\alpha l] + [\alpha k']$$

mit u bezeichnet, so ist (23) auch die Wahrscheinlichkeit, dass $|u| \leq \lambda$ sei. Daraus ergibt sich für einen zwischen den Grenzen u und $u + du$ liegenden Betrag dieses Fehlers die Wahrscheinlichkeit

$$(25)\qquad \varphi(u)du = \frac{1}{2\sqrt{\pi[\alpha^2\chi^2]}}\, e^{-\frac{u^2}{4[\alpha^2\chi^2]}}\, du;$$

mithin ist der durchschnittliche Fehler jener Bestimmung von x gleich

$$\sqrt{\frac{[\alpha^2\chi^2]}{\pi}}.$$

Durch die nämlichen Schlüsse wie im vorigen Artikel erkennt man, dass das vorteilhafteste Faktorensystem α_i durch die Bedingung

$$(26) \qquad [\alpha^2\chi^2] \text{ ein Minimum}$$

gekennzeichnet ist, und zwar sowohl in Rücksicht auf die Wahrscheinlichkeit P als auch in Rücksicht auf den durchschnittlichen Fehler.

Dieselbe Analyse, welche vorhin zur Bestimmung der Werte $x, y, z, \ldots$ geführt hat, liefert jetzt die Werte

$$x - [\alpha k'], \quad y - [\beta k'], \quad z - [\gamma k'], \quad \ldots$$

mit dem einzigen Unterschiede, dass für die k_i'' nun die χ_i^2 eintreten. Mithin kommt an die Stelle der Gleichung (20), Art. 114,

$$R(x - [\alpha k']) = \left[\frac{al}{\chi^2}\right] A_1 + \left[\frac{bl}{\chi^2}\right] A_2 + \left[\frac{cl}{\chi^2}\right] A_3 + \cdots.$$

Aus den Gleichungen (19) aber ergibt sich, wenn man sie der Reihe nach mit $k_1', k_2', k_3', \ldots$ multipliziert und dann summiert,

$$R[\alpha k'] = \left[\frac{ak'}{\chi^2}\right] A_1 + \left[\frac{bk'}{\chi^2}\right] A_2 + \left[\frac{ck'}{\chi^2}\right] A_3 + \cdots;$$

addiert man diese Gleichung zu der vorangehenden, so wird

$$Rx = \left[\frac{a(l+k')}{\chi^2}\right] A_1 + \left[\frac{b(l+k')}{\chi^2}\right] A_2 + \left[\frac{c(l+k')}{\chi^2}\right] A_3 + \cdots$$

u. s. f.

Mithin dienen zur Berechnung des vorteilhaftesten Wertsystems $x, y, z, \ldots$ die Gleichungen

$$(27) \qquad \begin{array}{l} \left[\frac{aa}{\chi^2}\right] x + \left[\frac{ab}{\chi^2}\right] y + \left[\frac{ac}{\chi^2}\right] z + \cdots = \left[\frac{a(l+k')}{\chi^2}\right] \\ \left[\frac{ba}{\chi^2}\right] x + \left[\frac{bb}{\chi^2}\right] y + \left[\frac{bc}{\chi^2}\right] z + \cdots = \left[\frac{b(l+k')}{\chi^2}\right] \\ \left[\frac{ca}{\chi^2}\right] x + \left[\frac{cb}{\chi^2}\right] y + \left[\frac{cc}{\chi^2}\right] z + \cdots = \left[\frac{c(l+k')}{\chi^2}\right] \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

Diese Gleichungen sind aber dieselben wie die aus der Bedingung

(28) $\left[\left(\frac{\varepsilon - k'}{\chi}\right)^2\right]$ ein Minimum

hervorgehenden, welcher zufolge die Summe der Quadrate der um k_i' verminderten Fehler ε_i, die Quadrate mit $\frac{1}{\chi_i^2}$ multipliziert, ein Kleinstes werden soll. In dieser Bedingung ist der allgemeinste Ausdruck der Methode der kleinsten Quadrate enthalten.

Gauss*) bezeichnet die Grösse $k_i' = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_i \varphi_i(\varepsilon_i) d\varepsilon_i$ als den konstanten Teil des Fehlers ε_i; man hat somit von jedem Beobachtungsfehler den ihm entsprechenden konstanten Teil zu subtrahieren und auf die übrig bleibenden Reste die Methode der kleinsten Quadrate in dem Sinne des vorigen Artikels anzuwenden, statt der Grössen k_i'' aber die Grössen $\frac{1}{2}(k_i'' - k_i'^2)$, oder, da es nur auf deren Verhältnisse ankommt, die Grössen $k_i'' - k_i'^2$ in Rechnung ziehend**).

116. Wenn es sich um die Entscheidung der Frage handelt, welcher von den beiden Gesichtspunkten, unter welchen Laplace den Gegenstand aufgefasst hat, den Vorzug verdient, so müsste die Vorfrage erörtert werden, ob es eine andere Art der Schätzung des Nachteils gibt, welcher mit einem Fehler verbunden ist, die zu demselben Resultate führen würde wie die von Laplace gewählte. Ist diese Frage zu bejahen, dann neigt die Entscheidung zu Gunsten des ersten, rein wahrscheinlichkeitstheoretischen Gesichtspunktes.

Nehmen wir an, der Nachteil eines Fehlers u in der Bestimmung des Elementes x würde nach dem absoluten Werte von u^m beurteilt werden, wobei m irgend eine positive, ganze oder gebrochene Zahl bedeutet, — eine negative Zahl muss ausgeschlossen werden, weil der Nachteil mit der Grösse

*) Theoria combinat., art. 5.

**) Vgl. ibid., art. 8.

des Fehlers wachsen muss. Dann hat man die Bestimmung von x zu beurteilen nach dem Werte des Integrals

$$\int_0^\infty u^m \varphi(u) du.$$

Setzt man hier für $\varphi(u)du$ den unter (25) des vorigen Artikels gefundenen Wert ein, so wird

$$\int_0^\infty u^m \varphi(u) du = \frac{1}{2\sqrt{\pi[\alpha^2\chi^2]}} \int_0^\infty u^m e^{-\frac{u^2}{4[\alpha^2\chi^2]}} du$$

und mit der Substitution $\frac{u^2}{4[\alpha^2\chi^2]} = t$ weiter

$$= \frac{2^{m-1}}{\sqrt{\pi}} [\alpha^2\chi^2]^{\frac{m}{2}} \int_0^\infty t^{\frac{m-1}{2}} e^{-t} dt$$

$$= \frac{2^{m-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) [\alpha^2\chi^2]^{\frac{m}{2}}.$$

Die Bedingung für das Minimum dieses Wertes ist also wieder:

$$[\alpha^2\chi^2] \text{ ein Minimum}$$

und bleibt es auch dann, wenn man als Maass für den Nachteil eines Fehlers u einen Ausdruck von der Form $Au^p + Bu^q + Cu^r + \cdots$ wählt, in welchem $A, B, C, \ldots$, $p, q, r, \ldots$ positive Zahlen vorstellen*).

In der That also führt die Schätzung des Nachteils eines Fehlers nach irgend einer positiven ganzen oder gebrochenen Potenz seines absoluten Wertes zu demselben Resultate wie die Benützung des einfachen Absolutwertes.

117. Der Schwerpunkt der Laplace'schen Beweisführung liegt in dem Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der mit gewissen Faktoren multiplizierten Fehler der einzelnen Beobachtungen zwischen gegebenen Grenzen eingeschlossen sei. Die Analyse, welche zu jenem Ausdrucke führt, enthält aber einen schwierigen Punkt, welcher auch

---

*) Glaisher, l. c., pag. 108.

bei Poisson und bei den späteren Geometern, die mit dieser Untersuchung sich beschäftigt haben, an der betreffenden Stelle wiederkehrt und die Frage veranlasst, ob die angewandten Näherungen zulässig seien, ob die durch sie gewonnenen Resultate nicht blosse Näherungen der Form, sondern auch Näherungen dem Werte nach sind. Mit dieser Frage hat sich Ellis*) und noch eingehender Glaisher**) beschäftigt.

Wir kehren zu dem Ausdruck (6), Art. 112, zurück und indem wir $g = 0$ setzen, lautet die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit, dass $|[\alpha\varepsilon]| \leqq \lambda$,

$$P = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \cdots \int_{-\infty}^\infty \varphi_1(\varepsilon_1)\varphi_2(\varepsilon_2)\cdots\varphi_n(\varepsilon_n) \cdot \frac{\sin\lambda\Theta\cos[\alpha\varepsilon]\Theta}{\Theta}\, d\Theta\, d\varepsilon_1\, d\varepsilon_2 \cdots d\varepsilon_n.$$

Wird $e^{[\alpha\varepsilon]\Theta\sqrt{-1}}$ an Stelle von $\cos[\alpha\varepsilon]\Theta$ geschrieben und zur Vereinfachung angenommen, dass ohne Rücksicht auf den Zeiger $\varphi_i(-\varepsilon_i) = \varphi_i(\varepsilon_i)$, so wird, weil dann

$$\int_{-\infty}^\infty \varphi_i(\varepsilon_i)\sin\alpha_i\varepsilon_i\Theta\, d\varepsilon_i = 0$$

ist,

$$(1)\qquad P = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\lambda\Theta}{\Theta}\, d\Theta \prod_1^n{}_i \left\{\int_{-\infty}^\infty \varphi_i(\varepsilon_i)\cos\alpha_i\varepsilon_i\Theta\, d\varepsilon_i\right\}.$$

Durch Entwicklung des Cosinus in eine Reihe und mit Benützung der früher eingeführten Bezeichnungen erhält man

$$\int_{-\infty}^\infty \varphi_i(\varepsilon_i)\cos\alpha_i\varepsilon_i\Theta\, d\varepsilon_i = 1 - \frac{\alpha_i^2 k_i''}{2}\Theta^2 + \frac{\alpha_i^4 k_i^{\mathrm{IV}}}{24}\Theta^4 - \cdots,$$

$$l \cdot \int_{-\infty}^\infty \varphi_i(\varepsilon_i)\cos\alpha_i\varepsilon_i\Theta\, d\varepsilon_i$$

$$= -\frac{\alpha_i^2 k_i''}{2}\Theta^2 - \frac{\alpha_i^4\left(3k_i''^2 - k_i^{\mathrm{IV}}\right)}{24}\Theta^4 - \frac{\alpha_i^6\left(30k_i''^3 - 15k_i''k_i^{\mathrm{IV}} + k_i^{\mathrm{VI}}\right)}{720}\Theta^6 - \cdots,$$

*) l. c., pag. 212 flg.

**) Philosoph. Magaz., fourth ser., XLIII, pag. 194—201.

so dass sich (1) unter die Form stellt

$$P = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty e^{-A\Theta^2 - B\Theta^4 - C\Theta^6 - \cdots}\,\frac{\sin\lambda\Theta}{\Theta}\,d\Theta.$$

Nun schliesst man folgendermaassen. Wie aus der Entwicklung hervorgeht, sind $A = \frac{[\alpha^2 k'']}{2}$, $B, C, \cdots$ Grössen von der Ordnung n; ist n eine sehr grosse Zahl, so hat die Exponentialgrösse unter dem Integralzeichen nur dann einen merklichen Wert, wenn Θ von der Grössenordnung $\frac{1}{\sqrt{n}}$ ist, so dass das Glied $A\Theta^2$ einen endlichen Wert besitzt, während die übrigen als von der Ordnung $\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}, \cdots$ neben ihm vernachlässigt werden können. Wäre hingegen Θ grösser, etwa von der Ordnung $\frac{1}{\sqrt[4]{n}}$, so würde das Glied $B\Theta^4$ endlich, dagegen das erste Glied als von der Ordnung $\sqrt{n}$ so gross werden, dass die Exponentialgrösse einen verschwindend kleinen Wert annähme. Unter der ersten Annahme ist also*)

$$(2) \qquad P = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty e^{-\frac{[\alpha^2 k'']}{2}\Theta^2}\,\frac{\sin\lambda\Theta}{\Theta}\,d\Theta = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\frac{\lambda}{\sqrt{2[\alpha^2 k'']}}} e^{-t^2}\,dt$$

in Übereinstimmung mit dem Resultate (14), Art. 114.

Da aber Θ im Laufe der Integration alle Werte von 0 bis ∞ annehmen soll, so entsteht die begründete Frage, ob auf diesem Wege wirklich ein Näherungswert für P erlangt wird. Um hierüber wenigstens in einem besonderen Falle Klarheit zu erlangen, sei $\varphi_1 = \cdots = \varphi_n = \varphi$, d. h. das Fehlergesetz bei allen Beobachtungen das nämliche (womit wir wieder bei den von Laplace zu Grunde gelegten Voraussetzungen angelangt sind) und überdies $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = \alpha$. Der Ausdruck (1) gestaltet sich dann wie folgt. Es wird

*) S. Anmerkg. zu Art. 72.

$$P = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \left\{\int\limits_{-\infty}^\infty \varphi(\varepsilon)\cos\alpha\varepsilon\Theta d\varepsilon\right\}^n \frac{\sin\lambda\Theta}{\Theta}\, d\Theta$$

$$= \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \left\{1 - \frac{\alpha^2 k''}{2}\Theta^2 + \frac{\alpha^4 k^{IV}}{24}\Theta^4 - \cdots\right\}^n \frac{\sin\lambda\Theta}{\Theta}\, d\Theta,$$

oder, wenn man $\frac{\Theta}{\sqrt{n}}$ für Θ setzt,

$$P = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \left\{1 - \frac{\alpha^2 k''\Theta^2}{2n} + \frac{\alpha^4 k^{IV}\Theta^4}{24n^2} - \cdots\right\}^n \sin\frac{\lambda\Theta}{\sqrt{n}}\frac{d\Theta}{\Theta}.$$

Wäre n eine unendliche Zahl von höherer Ordnung in Bezug auf die unendliche obere Grenze des Integrals, so gäbe es keine Schwierigkeit, indem dann $\left\{1 - \frac{\alpha^2 k''\Theta^2}{2n} + \cdots\right\}^n$ auf dem ganzen Integrationsgebiete durch $e^{-\frac{\alpha^2 k''}{2}\Theta^2}$ ersetzt werden könnte. Diese Annahme entspräche aber nicht der Wirklichkeit; n ist vielmehr eine endliche wenn auch sehr grosse Zahl.

Zerlegt man den letzten Ausdruck für P in die beiden Teile

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\frac{s}{\sqrt{n}}} \left\{1 - \frac{\alpha^2 k''\Theta^2}{2} + \cdots\right\}^n \frac{\sin\lambda\Theta}{\Theta}\, d\Theta$$

$$+ \frac{2}{\pi}\int\limits_{\frac{s}{\sqrt{n}}}^\infty \left\{\int\limits_{-\infty}^\infty \varphi(\varepsilon)\cos\alpha\varepsilon\Theta d\varepsilon\right\}^n \frac{\sin\lambda\Theta}{\Theta}\, d\Theta,$$

wobei s nur der einen Bedingung zu genügen hat, dass $\frac{s}{\sqrt{n}}$ eine Grösse von der Ordnung $\frac{1}{\sqrt{n}}$ sei, so kann für den ersten Teil näherungsweise

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^s e^{-\frac{\alpha^2 k''}{2}\Theta^2} \sin\frac{\lambda\Theta}{\sqrt{n}}\frac{d\Theta}{\Theta}$$

gesetzt werden; dies aber unterscheidet sich von

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-\frac{\alpha^2 k''}{2}\Theta^2} \sin\frac{\lambda\Theta}{\sqrt{n}}\,\frac{d\Theta}{\Theta},$$

d. i. von

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{\lambda}{\sqrt{2n\alpha^2 k''}}} e^{-t^2}\,dt \tag{3}$$

(und dies ist genau der Ausdruck, in welchen sich (2) unter den gemachten vereinfachenden Annahmen verwandelt) um

$$\frac{2}{\pi}\int_s^\infty e^{-\frac{\alpha^2 k''}{2}\Theta^2} \sin\frac{\lambda\Theta}{\sqrt{n}}\,\frac{d\Theta}{\Theta},$$

ein Betrag, der durch entsprechende Wahl von s hinreichend klein gemacht werden kann, um neben (3) unterdrückt werden zu können.

In dem zweiten Teil ist $\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\varepsilon)\cos\alpha\varepsilon\Theta d\Theta$, da Θ während der Integration beständig grösser bleibt als $\frac{s}{\sqrt{n}}$, ein von der Einheit um einen endlichen Betrag abweichender echter Bruch; infolge dessen ist dieser Teil gleich

$$\frac{2}{\pi}\,\xi^n\int_{\frac{s}{\sqrt{n}}}^{\infty}\frac{\sin\lambda\Theta}{\Theta}\,d\Theta < \frac{2}{\pi}\,\xi^n\int_0^\infty\frac{\sin\lambda\Theta}{\Theta}\,d\Theta = \xi^n,$$

wo $\xi < 1$, so dass er neben (3) ebenfalls vernachlässigt werden kann. Es stellt also in diesem besonderen Falle (3) thatsächlich einen Näherungswert von P dar.

Als Beleg für die Zulässigkeit der Laplace'schen Approximation hat Ellis einen besonderen Fall angeführt, in welchem P auf anderem Wege gewonnen werden kann und das so erhaltene Resultat mit dem aus der Laplace'schen Näherungsformel gefolgerten übereinstimmt. Glaisher hat diesen Fall wieder aufgenommen, vereinfacht und zwei weitere Fälle solcher Art hinzugefügt. Indessen liegt hierin

keine vollkommene Bestätigung der Analyse, da die Übereinstimmung wieder nur unter gewissen Voraussetzungen stattfindet. Wir führen nur das erste Beispiel an.

Es sei nämlich $\varphi(\varepsilon) = \frac{1}{2} e^{\mp \varepsilon}$, wo das obere Zeichen für ein positives, das untere für ein negatives ε gilt*). Dann ist

$$P = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty e^{\mp \varepsilon} \cos \alpha \varepsilon \Theta \, d\varepsilon \right\}^n \frac{\sin \lambda \Theta}{\Theta} \, d\Theta$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left\{ \int_0^\infty e^{-\varepsilon} \cos \alpha \varepsilon \Theta \, d\varepsilon \right\}^n \frac{\sin \lambda \Theta}{\Theta} \, d\Theta$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty (1 + \alpha^2 \Theta^2)^{-n} \frac{\sin \lambda \Theta}{\Theta} \, d\Theta^{**})$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left(1 + \frac{\alpha^2 \Theta^2}{n}\right)^{-n} \sin \frac{\lambda \Theta}{\sqrt{n}} \frac{d\Theta}{\Theta}$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-\alpha^2 \Theta^2} \sin \frac{\lambda \Theta}{\sqrt{n}} \frac{d\Theta}{\Theta} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\lambda}{2\sqrt{\alpha^2 n}}} e^{-t^2} dt,$$

und dies stimmt thatsächlich mit dem Resultat, welches die Näherungsformel (3) liefert, überein, da im vorliegenden Falle $k'' = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \varepsilon^2 e^{\mp \varepsilon} d\varepsilon = \int_0^\infty \varepsilon^2 e^{-\varepsilon} d\varepsilon = 2$ ist. Bei dem Übergang von $\left(1 + \frac{\alpha^2 \Theta^2}{n}\right)^{-n}$ zu $e^{-\alpha^2 \Theta^2}$ wird aber die Voraussetzung gemacht, dass entweder die unendliche obere Grenze von Θ durch eine endliche Grösse ersetzt werden kann oder dass n ohne Grenzen wachse. Der schwierige Punkt ist also nicht völlig aufgehoben.

---

*) Vgl. Artikel 45.

**) Nach der Formel $\int_0^\infty e^{-ax} \cos bx \, dx = \frac{a}{a^2 + b^2}$.

118. Die Verallgemeinerung, welche Ellis und Glaisher dem Laplace'schen Beweise gegeben haben, zeigt gegenüber des letzteren eigener Beweisführung den wesentlichen Unterschied, dass sie nicht auf die Bestimmung der vorteilhaftesten Werte aller Elemente zugleich, sondern zunächst auf die Ermittlung eines Elementes ausgeht; erst aus der Symmetrie der erlangten Gleichungen wird der Schluss gezogen, dass sie die gestellte Aufgabe nicht allein für dieses eine, sondern für alle Elemente zugleich lösen.

Ganz im Sinne seines Urhebers ist der Beweis durch Todhunter*) verallgemeinert worden; wenn auch ein letzter Schritt in dieser Beweisführung zu thun noch übrig bleibt, so bietet die Analyse doch hervorragendes Interesse und führt nebenbei zu einem bemerkenswerten Resultate, welches Laplace im ersten Supplement zu seiner Théor. analyt. des Probab. ohne Begründung angegeben hat. Sie stützt sich auf die Theorie zweier vielfachen bestimmten Integrale, welche wir in mehrfach abgeänderter Form und mit Umgehung des von Todhunter befolgten Weges der Induktion vorausschicken wollen**).

1) Es sei

$$(1)\quad u = A_{11}x_1^2 + A_{22}x_2^2 + A_{33}x_3^2 + \cdots + 2A_{12}x_1x_2 + \cdots + 2A_{n-1,n}x_{n-1}x_n$$

eine wesentlich positive quadratische Form der Elemente $x_1, x_2, \cdots x_n$, R ihre Determinante; ferner

$$(2)\qquad w = H_1x_1 + H_2x_2 + \cdots + H_nx_n$$

eine lineare Form derselben Elemente. Es handelt sich um das $n$fache bestimmte Integral

$$(3)\qquad U = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u}\cos w\, dx_1\, dx_2 \cdots dx_n.$$

Man bestimme die n Hilfsgrössen $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_n$ derart, dass sie den Gleichungen

---

*) Cambridge Philos. Transact., XI, pag. 219 flg.

**) Vgl. d. Verf. Note in den Monatsh. für Math. u. Phys., II.

$$
(4) \qquad \begin{aligned}
H_1 &= A_{11}\zeta_1 + A_{12}\zeta_2 + A_{13}\zeta_3 + \cdots \\
H_2 &= A_{21}\zeta_1 + A_{22}\zeta_2 + A_{23}\zeta_3 + \cdots \qquad (A_{ik} = A_{ki}) \\
H_3 &= A_{31}\zeta_1 + A_{32}\zeta_2 + A_{33}\zeta_3 + \cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

genügen, deren Determinante zusammenfällt mit der Determinante R von u und daher notwendig verschieden ist von Null. Bezeichnet v diejenige quadratische Form, welche aus u durch die Substitutionen $x_1 = \zeta_1$, $x_2 = \zeta_2, \ldots x_n = \zeta_n$ hervorgeht, so kann an Stelle von (4) auch geschrieben werden:

$$
(5) \qquad H_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial \zeta_1}, \qquad H_2 = \frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial \zeta_2}, \qquad H_3 = \frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial \zeta_3}, \ldots .
$$

Werden in w die Koeffizienten $H_1, H_2, \ldots H_n$ durch ihre Darstellungen (4) oder (5) ersetzt, so erscheint U als Funktion der $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_n$ und ihr partieller Differentialquotient in Bezug auf ζ_1 ist

$$
(6) \qquad \frac{\partial U}{\partial \zeta_1} = -\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u} \sin w \cdot \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x_1}\, dx_1\, dx_2 \cdots dx_n,
$$

weil

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial \zeta_1} &= \frac{\partial H_1}{\partial \zeta_2} x_1 + \frac{\partial H_2}{\partial \zeta_1} x_2 + \cdots + \frac{\partial H_n}{\partial \zeta_1} x_n \\
&= A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \cdots + A_{1n}x_n = \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x_1}.
\end{aligned}
$$

Wenn man nun andererseits in U zuerst die Integration in Bezug auf x_1 ausführt, so ergibt sich

$$
\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u} \cos w\, dx_1 = \left\{\frac{e^{-u}\sin w}{H_1}\right\}_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{H_1}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u} \sin w \frac{\partial u}{\partial x_1}\, dx_1
$$

und daraus, weil der erste Teil der rechten Seite verschwindet,

$$
\frac{1}{2} H_1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u} \cos w\, dx_1 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u} \sin w \cdot \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x_1}\, dx_1;
$$

wird nun beiderseits in Bezug auf die übrigen Variabeln zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ integriert, so ergibt sich

$$\frac{1}{2} H_1 \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u} \cos w \, dx_1 \, dx_2 \cdots dx_n$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u} \sin w \cdot \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 \, dx_2 \cdots dx_n ,$$

d. i. mit Rücksicht auf (3) und (6)

$$\frac{1}{2} H_1 U = - \frac{\partial U}{\partial \zeta_1}$$

und schliesslich wegen (5)

$$\frac{1}{4} U \frac{\partial v}{\partial \zeta_1} = - \frac{\partial U}{\partial \zeta_1}. \tag{7}$$

Geht man in derselben Weise mit den Parametern $\zeta_2, \ldots \zeta_n$ vor, so kommt man zu den analogen Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} U \frac{\partial v}{\partial \zeta_2} &= - \frac{\partial U}{\partial \zeta_2} \\ &\cdots\cdots \\ \frac{1}{4} U \frac{\partial v}{\partial \zeta_n} &= - \frac{\partial U}{\partial \zeta_n}. \end{aligned} \tag{7*}$$

Werden nun diese Gleichungen (7) und (7*) der Reihe nach mit $d\zeta_1, d\zeta_2, \ldots d\zeta_n$ multipliziert und hierauf summiert, so entsteht

$$\frac{dU}{U} = - \frac{1}{4} dv$$

und hieraus ergibt sich durch Integration

$$U = K e^{-\frac{v}{4}}, \tag{8}$$

wobei K eine Konstante bedeutet.

Zur Auffindung ihres Wertes setze man

$$\zeta_1 = \zeta_2 = \cdots = \zeta_n = 0;$$

dadurch wird auch $v = 0$ und $w = 0$ und somit

$$K = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u} dx_1 \, dx_2 \cdots dx_n . \tag{9}$$

Die Form u, da ihre Determinante R nicht verschwindet, lässt sich aber als Summe von n Quadraten linearer Formen

ihrer Variabeln darstellen und zwar unter andern auch in der Gestalt

$$u = A_{11} y_1^2 + B_{22} y_2^2 + C_{33} y_3^2 + \cdots + K_{nn} y_n^2,$$

wobei $B_{22}, C_{33}, \ldots K_{nn}$ gewisse neue Koeffizienten bezeichnen, welche hier einzeln vorläufig kein Interesse haben, und

$$\begin{array}{lllll}
y_1 = x_1 + \frac{A_{12}}{A_{11}} x_2 + & & \frac{A_{13}}{A_{11}} x_3 + \cdots + \frac{A_{1n}}{A_{11}} x_n \\
y_2 = & x_2 + & \frac{A_{11} A_{23} - A_{12} A_{13}}{A_{11} A_{22} - A_{12}^2} x_3 + \cdots\cdots \\
y_3 = & & x_3 + \cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots & & \\
y_n = & & \qquad\qquad x_n.
\end{array}$$

Die Determinante der neuen quadratischen Form in den Variabeln y reduziert sich auf das Hauptglied und ist $A_{11} B_{22} C_{33} \cdots K_{nn}$; die Determinante der Substitution reduziert sich ebenfalls auf das Hauptglied 1, da alle Elemente zu einer Seite der Diagonale null sind; folglich ist*)

$$R = A_{11} B_{22} \cdots K_{nn}. \tag{10}$$

Durch die angegebene Transformation wird aber

$$K = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-A_{11} y_1^2} dy_1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-B_{22} y_2^2} dy_2 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-K_{nn} y_n^2} dy_n$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{A_{11}}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{B_{12}}} \cdots \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{K_{nn}}},$$

also mit Rücksicht auf (10)

$$K = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{R}}. \tag{11}$$

Führt man diese Bestimmung in (8) ein, so wird endgiltig

$$U = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{R}} e^{-\frac{v}{4}}. \tag{12}$$

2) Mit Beibehaltung der früheren Bezeichnungen handelt es sich an zweiter Stelle um das Integral

*) Baltzer, Det., 5. Aufl., pag. 175.

$$(13) \qquad V_n = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \cdots \int_{-\infty}^\infty x_n e^{-u}\, dx_n\, dx_1 \cdots dx_{n-1}.$$

Mittels der eben benutzten Umformung von u wird, da $x_n = y_n$ ist,

$$V_n = \int_{-\infty}^\infty e^{-A_{11} y_1^2}\, dy_1 \int_{-\infty}^\infty e^{-B_{22} y_2^2}\, dy_2 \cdots$$

$$\cdots \int_{-\infty}^\infty e^{-J_{n-1,n-1} y_{n-1}^2}\, d y_{n-1} \int_0^\infty y_n e^{-K_{nn} y_n^2}\, dy_n$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{A_{11}}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{B_{22}}} \cdots \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{J_{n-1,n-1}}} \cdot \frac{1}{2 K_{nn}}$$

$$= \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{A_{11} B_{22} \cdots J_{n-1,n-1}}}{2R}.$$

Es ist aber

$$A_{11} = A_{11}$$

$$B_{22} = A_{22} - \frac{A_{12}^2}{A_{11}}$$

$$C_{33} = A_{33} - \frac{A_{13}^2}{A_{11}} - \frac{A_{11} A_{23} - A_{12} A_{13}}{A_{11} A_{22} - A_{12}^2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$K_{nn} = A_{nn} - N,$$

wobei N einen von A_{nn} unabhängigen Ausdruck bezeichnet; und da (s. (10))

$$\frac{\partial R}{\partial A_{nn}} = \frac{\partial R}{\partial K_{nn}} \frac{\partial K_{nn}}{\partial A_{nn}} = A_{11} B_{22} \cdots J_{n-1,n-1},$$

so bedeutet das zuletzt geschriebene Produkt die dem Element A_{nn} adjungierte Subdeterminante von R; bezeichnet man sie mit P_{nn}, so wird

$$(14) \qquad V_n = \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{P_{nn}}}{2R}.$$

Es bedarf keiner Erörterung, dass diese Formel auf jede der n Variabeln $x_1, x_2, \cdots x_n$ sinngemässe Anwendung findet.

Von den Formeln (12) und (14) wird nun im folgenden Artikel und bei späteren Untersuchungen wiederholt Gebrauch gemacht werden.

119. Aus n Fehlergleichungen der allgemeinen Form

$$\varepsilon_i = -l_i + a_i x + b_i y + c_i z + \cdots \quad (i=1,2,\cdots n) \tag{1}$$

sind die vorteilhaftesten Werte der m Elemente $x, y, z, \ldots$ zu bestimmen; vorausgesetzt wird, dass n eine sehr grosse Zahl im Vergleich zu m sei.

Man multipliziere jede der Fehlergleichungen mit einem unbestimmten Faktor α_i, dann mit β_i, mit γ_i, ... und bilde jedesmal die Summe; dadurch ergibt sich das Gleichungssystem

$$\begin{array}{l} [\alpha\varepsilon] = -[\alpha l] + [\alpha a]x + [\alpha b]y + [\alpha c]z + \cdots \\ [\beta\varepsilon] = -[\beta l] + [\beta a]x + [\beta b]y + [\beta c]z + \cdots \\ [\gamma\varepsilon] = -[\gamma l] + [\gamma a]x + [\gamma b]y + [\gamma c]z + \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array} \tag{2}$$

welches aus ebenso vielen Gleichungen bestehen soll als es zu bestimmende Elemente gibt; die Zahl der eingeführten Faktoren ist dann mn.

Legt man den linken Seiten dieser Gleichungen bestimmte Werte bei und setzt beispielsweise

$$E_\alpha \equiv [\alpha\varepsilon] = \mu_\alpha, \quad E_\beta \equiv [\beta\varepsilon] = \mu_\beta, \quad E_\gamma \equiv [\gamma\varepsilon] = \mu_\gamma, \ \cdots \tag{3}$$

so ergeben sich gewisse Werte für $x, y, z, \ldots$, und die Wahrscheinlichkeit des gleichzeitigen Bestehens der Gleichungen (3) ist zugleich ein Maassstab für die Zuverlässigkeit jener Werte.

Um diese Wahrscheinlichkeit zu finden, nehme man zunächst an, jeder Fehler ε_i sei nur solcher Werte fähig, welche Vielfache eines gegebenen Betrages ω sind und zwischen $\nu_1\omega$ und $\nu_2\omega$ liegen; jeder mögliche Wert von ε_i ist dann in der Form $\eta\omega$ enthalten, wo η eine zwischen den ganzen Zahlen ν_1, ν_2 liegende ganze Zahl bedeutet; um an bestimmte Vorstellungen anzuknüpfen, sei $\nu_1 \leqq \eta \leqq \nu_2$. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler der i^{ten} Beobachtung $\eta\omega$ betrage, werde mit $f_i(\eta)$ bezeichnet.

Der Faktor ϖ werde so bestimmt, dass $\varpi\alpha_i, \varpi\beta_i, \varpi\gamma_i, \cdots$ für alle Werte des Zeigers i von 1 bis n ganze Zahlen sind.

Die Wahrscheinlichkeit, dass gleichzeitig

$$\varpi E_\alpha = m_\alpha\omega, \quad \varpi E_\beta = m_\beta\omega, \quad \varpi E_\gamma = m_\gamma\omega, \ \cdots \tag{4}$$

sei, ist dargestellt durch den Koeffizienten von

$$t^{m_\alpha \omega} u^{m_\beta \omega} v^{m_\gamma \omega} \ldots$$

in der Entwicklung des Produktes

$$X = Q_1 Q_2 \cdots Q_n,$$

worin

$$Q_i = \sum_{\eta = \nu_1}^{\eta = \nu_2} f_i(\eta) t^{\varpi \alpha_i \eta \omega} u^{\varpi \beta_i \eta \omega} v^{\varpi \gamma_i \eta \omega}, \ldots.$$

Setzt man

$$t^\omega = e^{\Theta \sqrt{-1}}, \quad u^\omega = e^{\Phi \sqrt{-1}}, \quad v^\omega = e^{\Psi \sqrt{-1}}, \ldots$$

so wird jener Koeffizient das von natürlichen Potenzen freie Glied des Produktes

$$X e^{-(m_\alpha \Theta + m_\beta \Phi + m_\gamma \Psi + \cdots) \sqrt{-1}}.$$

sein und ausgeschieden werden, wenn man dies Produkt, nachdem es mit $d\Theta \, d\Phi \, d\Psi \ldots$ multipliziert worden, in Bezug auf diese m Variabeln zwischen den Grenzen $-\pi$ und π integriert. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist demnach

$$p = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cdots X e^{-(m_\alpha \Theta + m_\beta \Phi + m_\gamma \Psi + \cdots) \sqrt{-1}} d\Theta \, d\Phi \, d\Psi \cdots.$$

Wird

$$m_\alpha \omega = \mu_\alpha \varpi, \quad m_\beta \omega = \mu_\beta \varpi, \quad m_\gamma \omega = \mu_\gamma \varpi, \cdots$$

und

$$\varpi \Theta = \omega \Theta', \quad \varpi \Phi = \omega \Phi', \quad \varpi \Psi = \omega \Psi', \cdots$$

gesetzt, so kommt, wenn man ω unendlich klein werden lässt und dadurch ausspricht, dass der Fehler ε_i aller zwischen den ihm eigentümlichen Grenzen liegenden Werte fähig sei,

$$p = \left(\frac{\omega}{2\pi\varpi}\right)^m \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots X e^{-(\mu_\alpha \Theta' + \mu_\beta \Phi' + \mu_\gamma \Psi' + \cdots) \sqrt{-1}} d\Theta' \, d\Phi' \, d\Psi' \cdots.$$

Weil aber m_α, m_β, $m_\gamma, \ldots$ als ganze Zahlen die Einheit zur kleinsten Änderung haben, so ist

$$\frac{\omega}{\varpi} = d\mu_\alpha = d\mu_\beta = d\mu_\gamma = \cdots,$$

und unterdrückt man den Accent bei Θ', Φ', $\Psi', \ldots$, so wird

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots X e^{-(\mu_\alpha \Theta + \mu_\beta \Phi + \mu_\gamma \Psi + \cdots)\sqrt{-1}}\, d\Theta\, d\Phi\, d\Psi \cdots$$

die Wahrscheinlichkeit, dass zu gleicher Zeit

$$\begin{gathered} \mu_\alpha \leqq E_\alpha \leqq \mu_\alpha + d\mu_\alpha \\ \mu_\beta \leqq E_\beta \leqq \mu_\beta + d\mu_\beta \\ \mu_\gamma \leqq E_\gamma < \mu_\gamma + d\mu_\gamma \\ \cdots\cdots\cdots \end{gathered}$$

Es erübrigt noch, X in den Grössen darzustellen, welche der letzte Ausdruck für p ausser X enthält. Es sei

$$\nu_1 \omega = g_1, \qquad \nu_2 \omega = g_2, \qquad \eta \omega = \varepsilon;$$

weil die Wahrscheinlichkeit eines bestimmten Betrages $\eta\omega$ mit ω zugleich unendlich klein wird, so sei ferner

$$f_i(\eta) = \omega \varphi_i(\varepsilon) = \varphi_i(\varepsilon)\, d\varepsilon;$$

dann ist, nach Ausführung derselben Transformationen,

$$Q_i = \int_{g_1}^{g_2} \varphi_i(\varepsilon)\, d\varepsilon\, e^{(\alpha_i \Theta + \beta_i \Phi + \gamma_i \Psi + \cdots)\varepsilon\sqrt{-1}}.$$

Setzt man also

$$\alpha_i \Theta + \beta_i \Phi + \gamma_i \Psi + \cdots = \tau_i \tag{6}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \int_{g_1}^{g_2} \varphi_i(\varepsilon) \cos \tau_i \varepsilon\, d\varepsilon &= \varrho_i \cos \vartheta_i \\ \int_{g_1}^{g_2} \varphi_i(\varepsilon) \sin \tau_i \varepsilon\, d\varepsilon &= \varrho_i \sin \vartheta_i \end{aligned} \right. \tag{7}$$

$$\begin{gathered} \varrho_1 \varrho_2 \cdots \varrho_n = Y \\ \vartheta_1 + \vartheta_2 + \cdots + \vartheta_n = \sigma, \end{gathered} \tag{8}$$

so wird

$$X = Y e^{\sigma\sqrt{-1}},$$

und mit der weitern Abkürzung

$$\mu_\alpha \Theta + \mu_\beta \Phi + \mu_\gamma \Psi + \cdots = s \tag{9}$$

stellt sich p in der Form dar

$$p = \frac{d\mu_\alpha d\mu_\beta d\mu_\gamma \cdots}{(2\pi)^m} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \cdots Y e^{(\sigma - s)\sqrt{-1}}\, d\Theta\, d\Phi\, d\Psi \cdots.$$

Wie aber aus den Gleichungen (6), (7), (8) hervorgeht, ändern σ und s ihr Vorzeichen, wenn alle Variabeln Θ, Φ, Ψ,... es zugleich ändern, während Y wesentlich positiv ist; die Komplexität von p ist daher nur scheinbar, weil der imaginäre Bestandteil verschwindet, und es bleibt

$$p = \frac{d\mu_\alpha d\mu_\beta d\mu_\gamma \cdots}{(2\pi)^m} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \cdots Y \cos(s - \sigma)\, d\Theta\, d\Phi\, d\Psi \cdots.$$

Die Vergleichung von (7) mit den Gleichungen (9), Art. 112, zeigt, dass man durch dieselbe Analyse, wie sie in dem letztgenannten Artikel befolgt worden ist, und mit Benützung der Abkürzungen

$$\int_{g_1}^{g_2} \varepsilon \varphi_i(\varepsilon)\, d\varepsilon = k_i'$$

$$\int_{g_1}^{g_2} \varepsilon^2 \varphi_i(\varepsilon)\, d\varepsilon = k_i''$$

. . . .

$$\frac{1}{2}(k_i'' - k_i'^2) = \chi_i^2$$

für Y und σ die näherungsweise richtigen Bestimmungen

$$Y = e^{-[\chi^2\tau^2]}, \qquad \sigma = [k'\tau]$$

erhält, so dass weiter

$$(10) \qquad p = \frac{d\mu_\alpha d\mu_\beta d\mu_\gamma \cdots}{(2\pi)^m}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \cdots e^{-[\chi^2\tau^2]} \cos(s - [k'\tau])\, d\Theta\, d\Phi\, d\Psi \cdots.$$

Den Gleichungen (6) und (9) zufolge sind τ_i und s lineare Formen der Variabeln Θ, Φ, Ψ, ...; daher ist $[\chi^2\tau^2]$ eine quadratische Form dieser Variabeln und ihr Koeffizientensystem wegen (6)

$$
(11)\quad \begin{array}{llll}
A_{11} = [\alpha^2\chi^2], & A_{12} = [\alpha\beta\chi^2], & A_{13} = [\alpha\gamma\chi^2], & \cdots \\
A_{21} = A_{12}, & A_{22} = [\beta^2\chi^2], & A_{23} = [\beta\gamma\chi^2], & \cdots \\
A_{31} = A_{13}, & A_{32} = A_{23}, & A_{33} = [\gamma^2\chi^2], & \cdots \\
\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot
\end{array}
$$

ferner $s - [k'\tau]$ eine lineare Form mit den Koeffizienten (s. die Gleichungen (6) und (9))

$$
(12)\quad H_1 = \mu_\alpha - [\alpha k'], \quad H_2 = \mu_\beta - [\beta k'], \quad H_3 = \mu_\gamma - [\gamma k'], \cdots.
$$

Das Integral in (10) ist demnach von der Form (3), Art. 118, und wenn man seinen nach der dort entwickelten Formel (12) gebildeten Wert einsetzt, so erhält man

$$
(13)\qquad p = \frac{d\mu_\alpha d\mu_\beta d\mu_\gamma \cdots}{(2\pi)^m} \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\sqrt{R}} e^{-\frac{v}{4}},
$$

wobei R die Determinante des Grössensystems (11) und v die quadratische Form bedeutet, welche mit den Koeffizienten (11) gebildet und nach den Grössen $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_n$ geordnet ist, welch letztere sich aus dem Gleichungssystem

$$
(14)\qquad \begin{array}{l}
H_1 = A_{11}\zeta_1 + A_{12}\zeta_2 + A_{13}\zeta_3 + \cdots \\
H_2 = A_{21}\zeta_1 + A_{22}\zeta_2 + A_{23}\zeta_3 + \cdots \\
H_3 = A_{31}\zeta_1 + A_{32}\zeta_2 + A_{33}\zeta_3 + \cdots \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot
\end{array}
$$

ergeben.

Stellt man den Werten $x, y, z, \ldots$ der Elemente, welche dem Gleichungssystem (s. (2) und (3))

$$
(15)\qquad \begin{array}{l}
\mu_\alpha = -[\alpha l] + [\alpha a]x + [\alpha b]y + [\alpha c]z + \cdots \\
\mu_\beta = -[\beta l] + [\beta a]x + [\beta b]y + [\beta c]z + \cdots \\
\mu_\gamma = -[\gamma l] + [\gamma a]x + [\gamma b]y + [\gamma c]z + \cdots \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot
\end{array}
$$

entsprechen, diejenigen Werte $x_1, y_1, z_1 \ldots$ entgegen, welche aus dem Gleichungssystem

$$
(16)\qquad \begin{array}{l}
[\alpha k'] = -[\alpha l] + [\alpha a]x_1 + [\alpha b]y_1 + [\alpha c]z_1 + \cdots \\
[\beta k'] = -[\beta l] + [\beta a]x_1 + [\beta b]y_1 + [\beta c]z_1 + \cdots \\
[\gamma k'] = -[\gamma l] + [\gamma a]x_1 + [\gamma b]y_1 + [\gamma c]z_1 + \cdots \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot
\end{array}
$$

hervorgehen, so sind

$$x - x_1 = x', \quad y - y_1 = y', \quad z - z_1 = z', \cdots$$

die Fehler der letzteren Bestimmungen, wenn die ersteren die wahren Werte der Elemente vorstellen; und man hat daher, um die Wahrscheinlichkeit für die Koexistenz der Fehler $x', y', z' \ldots$ in den Bestimmungen $x_1, y_1, z_1, \ldots$ zu erhalten, nur nötig, den Ausdruck (13) statt in den Grössen $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \ldots$ in $x', y', z', \ldots$ darzustellen.

Hierzu dienen die Gleichungen (14) und die nachfolgenden, welche durch Subtraktion korrespondierender Gleichungen der Systeme (15) und (16) unter Berücksichtigung von (12) erhalten werden, nämlich

$$(17) \qquad \begin{aligned} H_1 &= [\alpha a]x' + [\alpha b]y' + [\alpha c]z' + \cdots \\ H_2 &= [\beta a]x' + [\beta b]y' + [\beta c]z' + \cdots \\ H_3 &= [\gamma a]x' + [\gamma b]y' + [\gamma c]z' + \cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Durch die Substitution (14) geht v in eine quadratische Form der $H_1, H_2, H_3, \ldots$ über — ihre Determinante heisse S —, während vermöge (12) sich $d\mu_\alpha \, d\mu_\beta \, d\mu_\gamma \ldots$ verwandelt in $dH_1 \, dH_2 \, dH_3 \cdots$.

Durch die darauffolgende Substitution (17) wird v zu einer quadratischen Form der $x', y', z', \ldots$ — ihre Koeffizienten mögen mit C_{ik} bezeichnet werden —, während $dH_1 \, dH_2 \, dH_3 \ldots$ übergeht in $\Delta dx' dy' dz' \ldots$, wenn unter Δ die Determinante des Gleichungssystems (17) verstanden wird.

Mithin wird

$$(18) \qquad p = \frac{\Delta}{(2\pi)^m} \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\sqrt{R}} e^{-\frac{v}{4}} dx' dy' dz' \cdots$$

die Wahrscheinlichkeit eines Fehlersystems $x', y', z', \ldots$ in den durch (16) gelieferten Bestimmungen der unbekannten Elemente.

120. Um daraus die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers x' in der Bestimmung x_1 unabhängig von den Fehlern der übrigen Elemente zu erhalten, hat man den Ausdruck (18) in Bezug auf $y', z', \ldots$ zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ zu integrieren; und um den Durchschnitt der positiven Werte von x' zu finden, hat man den so gewonnenen nur von x'

abhängigen Ausdruck mit x' zu multiplizieren und bezüglich dieser Variabeln zwischen 0 und ∞ zu integrieren. Der durchschnittliche Fehler (in Laplace's Sinne), der in x_1 zu befürchten ist, kommt demnach gleich

$$(19)\qquad \frac{\varDelta}{(2\pi)^m}\frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\sqrt{R}}\int\limits_0^\infty\int\limits_{-\infty}^\infty\int\limits_{-\infty}^\infty \cdots x' e^{-\frac{v}{4}} dx'\, dy'\, dz' \cdots .$$

Das hier auftretende Integral ist von der Art des in Gleichung (13), Art. 118, behandelten; bezeichnet man die Determinante m^{ten} Grades der Form v mit T, so dass $T = \Sigma \pm C_{11} C_{22} C_{33} \cdots$, so ist die Determinante der Form $\frac{v}{4}$ gleich $4^{-m} T$; und heisst T_{11} die zu C_{11} adjungierte Determinante von T, so ist $4^{-m+1} T_{11}$ die analoge Adjunkte in Bezug auf die Form $\frac{v}{4}$; vermöge der Gleichung (14), Art. 118, hat also das obige Integral den Wert

$$\frac{\pi^{\frac{m-1}{2}}\sqrt{4^{-m+1} T_{11}}}{2 \cdot 4^{-m} T} = \frac{2^m \pi^{\frac{m-1}{2}}\sqrt{T_{11}}}{T}$$

und der Ausdruck (19) geht über in

$$(20)\qquad \frac{\varDelta}{\sqrt{\pi R}} \cdot \frac{\sqrt{T_{11}}}{T}.$$

Dies lässt noch eine weitere Vereinfachung zu, wenn man die Veränderungen verfolgt, welche die Determinante von v im Laufe der Transformationen erfährt. Während v dargestellt ist in den Variabeln

$$\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \ldots; \qquad H_1, H_2, H_3, \ldots; \qquad x', y', z', \ldots,$$

hat es die Determinante

$$R, \qquad\qquad S, \qquad\qquad T;$$

der Übergang von der ersten Darstellung zur zweiten geschieht durch die Substitution (14) mit der Determinante R, und der Übergang von der zweiten Darstellung zur dritten durch die Substitution (17) mit der Determinante $\varDelta$; mithin ist*)

---

*) Baltzer, Det., 5. Aufl., pag. 175.

$$\frac{S}{R} = \left(\frac{1}{R}\right)^2$$

$$\frac{T}{S} = \varDelta^2$$

und daraus folgt*)

(21) $$RT = \varDelta^2.$$

Hiermit aber verwandelt sich der Ausdruck (20) für den durchschnittlichen Wert von $+x'$ in

(22) $$\sqrt{\frac{T_{11}}{\pi T}}.$$

Daraus schliesst man zunächst auf die bemerkenswerte Thatsache, dass sich die durchschnittlichen Fehler, welche in den Bestimmungen $x_1, y_1, z_1, \ldots$ der Elemente zu befürchten sind, zu einander verhalten wie $\sqrt{T_{11}} : \sqrt{T_{22}} : \sqrt{T_{33}} : \cdots$.

121. Die Faktoren $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \ldots$ sind nun derart zu bestimmen, dass der Ausdruck (22), oder was dasselbe ist, dass $\frac{T_{11}}{T}$ möglichst klein werde.

Für eine beliebige Anzahl von Elementen ist diese Bedingung bisher nicht gelöst worden. Wir wollen mit Todhunter zeigen, dass sie, auf den Fall zweier Elemente angewandt, zu den in Artikel 109 gefundenen Resultaten führt.

In diesem Falle ist

$$\begin{aligned} v &= A_{11}\zeta_1^2 + A_{22}\zeta_2^2 + 2A_{12}\zeta_1\zeta_2 \\ &= (A_{11}\zeta_1 + A_{12}\zeta_2)\zeta_1 + (A_{21}\zeta_1 + A_{22}\zeta_2)\zeta_2 \end{aligned}$$

und die zur Bestimmung von ζ_1, ζ_2 führenden Gleichungen lauten

$$\begin{aligned} H_1 &= A_{11}\zeta_1 + A_{12}\zeta_2 \\ H_2 &= A_{21}\zeta_1 + A_{22}\zeta_2. \end{aligned}$$

Hieraus folgt

---

*) Todhunter hat diese Relation indirekt durch die Bemerkung gefunden, dass durch Integration des Ausdrucks (18) in Bezug auf alle Variablen zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ die Einheit als Resultat herauskommen müsse. Mit der oben gegebenen direkten Ableitung jener Relation ist demnach eine Verifikation der Formel (18) gegeben.

$$\xi_1 = \frac{A_{22}H_1 - A_{21}H_2}{R}, \qquad \xi_2 = \frac{A_{11}H_2 - A_{12}H_1}{R},$$

so dass v, in H_1, H_2 dargestellt, zu der Gleichung

$$Rv = A_{22}H_1^2 + A_{11}H_2^2 - A_{12}H_1H_2$$

Anlass gibt; wird hier die Substitution (17), Art. 120, ausgeführt, so ergibt sich

$$R_v = A_{22}([\alpha a]x' + [\alpha b]y')^2 + A_{11}([\beta a]x' + [\beta b]y')^2$$
$$- 2A_{12}([\alpha a]x' + [\alpha b]y')([\beta a]x' + [\beta b]y').$$

Mithin ist, unter gleichzeitiger Ersetzung von A_{11}, A_{22}, A_{12} durch die Werte aus (11), Art. 120,

$$RC_{11} = [\beta^2\chi^2][\alpha a]^2 - 2[\alpha\beta\chi^2][\alpha a][\beta a] + [\alpha^2\chi^2][\beta a]^2$$
$$RC_{12} = [\beta^2\chi^2][\alpha a][\alpha b] - [\alpha\beta\chi^2]([\alpha a][\beta b] + [\alpha b][\beta a])$$
$$+ [\alpha^2\chi^2][\beta a][\beta b]$$
$$RC_{22} = [\beta^2\chi^2][\alpha b]^2 - 2[\alpha\beta\chi^2][\alpha b][\beta b] + [\alpha^2\chi^2][\beta b]^2;$$

weiter hat man

$$T = C_{11}C_{22} - C_{12}^2, \qquad T_{11} = C_{22},$$

und vermöge (21), Art. 120,

$$\frac{T_{11}}{T} = \frac{RT_{11}}{\Delta^2} = \frac{RC_{22}}{\Delta^2} = \frac{[\beta^2\chi^2][\alpha b]^2 - 2[\alpha\beta\chi^2][\alpha b][\beta b] + [\alpha^2\chi^2][\beta b]^2}{([\alpha a][\beta b] - [\alpha b][\beta a])^2}.$$

Dies aber stimmt mit dem bei Laplace mit $\frac{H}{\Delta^2}$ bezeichneten Ausdrucke (s. Artikel 109) überein, wenn man wie dort für alle Beobachtungen dasselbe Gesetz annimmt und $\chi = 1$ setzt.

Die Ausführung der Bedingung: $\frac{T_{11}}{T}$ ein Minimum, gibt

$$\alpha_i = M\frac{a_i}{\chi_i^2}, \qquad \beta_i = M\frac{b_i}{\chi_i^2},$$

wo M eine Konstante bezeichnet, und hiermit erhält man auf Grund von (16), Art. 120, die zur Bestimmung der vorteilhaftesten Werte der Unbekannten dienlichen Gleichungen

$$\left[\frac{aa}{\chi^2}\right]x_1 + \left[\frac{ab}{\chi^2}\right]y_1 = \left[\frac{a(l+k')}{\chi^2}\right]$$
$$\left[\frac{ba}{\chi^2}\right]x_1 + \left[\frac{bb}{\chi^2}\right]y_1 = \left[\frac{b(l+k')}{\chi^2}\right]$$

in Übereinstimmung mit den Gleichungen (27), Art. 115.

122. Das am Beginn des Art. 118 angezogene Laplace'sche Resultat, welches die obige Analyse nebenher liefert, ergibt sich in folgender Weise. Führt man die vorteilhaftesten Faktorensysteme

$$\alpha_i = M\frac{a_i}{\chi_i^2}, \quad \beta_i = M\frac{b_i}{\chi_i^2}, \quad \gamma_i = M\frac{c_i}{\chi_i^2}, \cdots$$

ein, so fallen (mit $M = 1$) die Koeffizienten der Gleichungssysteme (14) und (17), Art. 120, in das eine System zusammen

$$\begin{array}{lll} A_{11} = \left[\frac{aa}{\chi^2}\right], & A_{12} = \left[\frac{ab}{\chi^2}\right], & A_{13} = \left[\frac{ac}{\chi^2}\right], \cdots \\ A_{21} = A_{12}, & A_{22} = \left[\frac{bb}{\chi^2}\right], & A_{23} = \left[\frac{bc}{\chi^2}\right], \cdots \\ A_{31} = A_{13}, & A_{32} = A_{23}, & A_{33} = \left[\frac{cc}{\chi^2}\right], \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

und es wird somit, da die linken Seiten beider Gleichungssysteme ebenfalls übereinstimmen,

$$\zeta_1 = x', \quad \zeta_2 = y', \quad \zeta_3 = z', \cdots;$$

infolge dessen hat man weiter

$$\begin{aligned} v &= A_{11}\zeta_1^2 + A_{22}\zeta_2^2 + A_{33}\zeta_3^2 + \cdots + 2A_{12}\zeta_1\zeta_2 + 2A_{13}\zeta_1\zeta_3 + \cdots \\ &= \sum\left\{\frac{1}{\chi_i^2}(a_i^2x'^2 + b_i^2y'^2 + c_i^2z'^2 + \cdots + 2a_ib_ix'y' + 2a_ic_ix'z' + \cdots)\right\} \\ &= \sum\left(\frac{a_ix' + b_iy' + c_iz' + \cdots}{\chi_i}\right)^2 \end{aligned}$$

und vermöge (18), Art. 120, da nun

$$R = \Delta = \begin{vmatrix} \left[\frac{aa}{\chi^2}\right], & \left[\frac{ab}{\chi^2}\right], & \left[\frac{ac}{\chi^2}\right], & \cdots \\ \left[\frac{ba}{\chi^2}\right], & \left[\frac{bb}{\chi^2}\right], & \left[\frac{bc}{\chi^2}\right], & \cdots \\ \left[\frac{ca}{\chi^2}\right], & \left[\frac{cb}{\chi^2}\right], & \left[\frac{cc}{\chi^2}\right], & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

geworden ist, drückt

$$(23) \quad p = \frac{\sqrt{R}}{(2\sqrt{\pi})^m} e^{-\Sigma\left(\frac{a_ix' + b_iy' + c_iz' + \cdots}{2\chi_i}\right)^2} dx'\,dy'\,dz' + \cdots$$

die Wahrscheinlichkeit aus, dass den vorteilhaftesten Be-

stimmungen $x_1, y_1, z_1, \ldots$ der Elemente zu gleicher Zeit die Fehler $x', y', z', \ldots$ anhaften*).

Dies ist das von Laplace an der betreffenden Stelle**) ohne Begründung angeführte Resultat, mit dem Unterschiede, dass nach seiner Voraussetzung positive und negative Fehler gleichen Betrages gleich wahrscheinlich sind, weshalb $k_i' = 0$ und $\chi^2 = \frac{1}{2} k_i''$, und dass alle Beobachtungen demselben Gesetze unterliegen, weshalb k_i'' unabhängig ist von i. Den konstanten Faktor $\frac{\sqrt{R}}{(2\sqrt{\pi})^m}$ hat Laplace, als für seinen Zweck irrelevant, nicht angegeben.

Wir wollen indessen zeigen, dass sich das obige Resultat bei Laplace vollständig vorfindet, wenn es dort auch nur für den Fall zweier Elemente und unter den eben angeführten Einschränkungen nachgewiesen werden kann. Dabei wird sich Gelegenheit bieten, den Zusammenhang zwischen den Formeln bei Laplace und den gegenwärtigen herzustellen, beziehungsweise ihre Übereinstimmung zu zeigen.

In Gleichung (8), Art. 109, wurde

$$p = \frac{\varkappa}{4\pi\varkappa'' g^2} \frac{\Delta}{\sqrt{R}} e^{-\frac{\varkappa(Fu^2 + 2Guv + Hv^2)}{4\varkappa'' g^2 R}} du\, dv$$

als Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit gefunden, dass den beiden zu bestimmenden Elementen gleichzeitig die Fehler u, v anhaften. Für die vorteilhaftesten Faktorensysteme wird (s. die Gleichungen (10), (5), (6), (7) des citierten Artikels) mit $M = 1$

$$\begin{aligned} F &= [aa]\{[aa][bb] - [ab]^2\}, \\ G &= [ab]\{[aa][bb] - [ab]^2\}, \\ H &= [bb]\{[aa][bb] - [ab]^2\}, \\ R &= \Delta = [aa][bb] - [ab]^2, \end{aligned}$$

mithin

$$\begin{aligned} \frac{Fu^2 + 2Guv + Hv^2}{R} &= [aa]u^2 + 2[ab]uv + [bb]v^2 \\ &= \sum (a_i u + b_i v)^2; \end{aligned}$$

*) Vgl. den Schluss des Art. 191.

**) Théorie analyt. des Probab., pag. 539 nat. édit.

ferner ist in Laplace'schen Zeichen $g\varkappa = 1$, $2g^3\varkappa'' = k''$. Daher geht der obige Ausdruck über in

$$p = \frac{\sqrt{[aa][bb] - [ab]^2}}{2\pi k''} e^{-\frac{1}{2k''}\Sigma(a_i u + b_i v)^2} du\, dv$$

und dies ist genau dasselbe, was die Formel (23) für den Fall zweier Elemente und unter den erwähnten Einschränkungen angibt.

§ 5. Zweiter Beweis von Gauss.

123. Die Laplace'schen Untersuchungen, so merkwürdig in ihren Resultaten, bauen sich auf einer Voraussetzung auf, welche in der Praxis nur in seltenen Fällen erfüllt sein wird; während nämlich hier die Anzahl der Beobachtungen zumeist nur eine mässig grosse ist, setzen jene Untersuchungen eine „sehr grosse" Anzahl von Beobachtungen voraus. Bei der Unbestimmtheit des Begriffes einer „sehr grossen" Zahl bleibt es daher zweifelhaft, ob in einem gegebenen Falle jene Voraussetzung so weit erfüllt ist, um den Resultaten die Bedeutung und die Eigenschaften beimessen zu können, welche ihnen die Theorie zuschreibt. Hierzu kommt noch die Schwierigkeit und Umständlichkeit der Analyse.

Diese beiden Mängel sind von Gauss in dem zweiten Beweise, welchen er für die Methode der kleinsten Quadrate gegeben hat*), in der glücklichsten Weise vermieden worden. Durch diesen Beweis ist mittels einer von jeder Schwierigkeit freien Analyse dargethan worden, dass die Methode der kleinsten Quadrate allen andern linearen Kombinationen der Fehlergleichungen vorzuziehen ist, welches auch die Anzahl der Beobachtungen und wie auch das Gesetz beschaffen sei, welchem der Fehler der einzelnen Beobachtung unterliegt, wenn nur jeder Beobachtungsfehler von systematischen Teilen befreit ist, so dass positive und negative Beträge gleicher Grösse gleich häufig erscheinen.

Der Gedankengang dieses zweiten Beweises ist im Wesen derselbe, welcher der zweiten von Laplace gewählten Methode

*) Theoria combinat. observat., pars prior; 1821.

zu Grunde liegt. Aber in der Art der Beurteilung des Nachteils, welcher mit einem Fehler verbunden ist, gehen beide Geometer auseinander. Während Laplace diesen Nachteil, oder wie Gauss ihn treffend nennt, das Moment des Fehlers seinem absoluten Betrage gleich setzt, wählt Gauss dafür das Quadrat des Fehlers (s. Artikel 8 und 9). Willkürlich ist die eine Annahme gewiss ebenso wie die andere. Die Vernunft fordert nur, dass das Moment eines Fehlers durch eine mit ihm wachsende, mit ihm zugleich verschwindende und von seinem Vorzeichen unabhängige (beständig positive) Funktion dargestellt werde. Diesen Bedingungen entsprechen beide Annahmen; die zweite gewährt den Vorteil, dass sie das Moment durch die einfachste stetige Funktion ausdrückt, welche die verlangten Eigenschaften besitzt, und hierin liegt der wesentliche Grund, warum sie der analytischen Behandlung weit geringere Schwierigkeiten darbietet als die erste. Der ersten Annahme zufolge wächst das Moment ebenso wie der absolute Betrag des Fehlers, der zweiten zufolge wie sein Quadrat: wenn hiernach die zweite Annahme den Nachteil grosser Fehler weit höher anschlägt als die erste, so kann dieser Umstand, wiewohl die Entscheidung denn doch dem freien Ermessen überlassen werden muss, eher zu ihren Gunsten gedeutet werden*).

---

*) Über diesen Punkt sowie über die Gründe, welche ihn bewogen haben, von der ersten Begründung der Methode der kleinsten Quadrate abzugehen, spricht sich Gauss in einem vom 26. Februar 1839 datierten Briefe an Bessel (anlässlich dessen „Untersuchungen über die Wahrscheinlichkeit der Beobachtungsfehler", s. Art. 38) wie folgt aus: „Dass ich übrigens die in der Theoria Motus Corp. coel. angewandte Metaphysik für die Methode der kleinsten Quadrate späterhin habe fallen lassen, ist vorzugsweise auch aus einem Grunde geschehen, den ich selbst öffentlich nicht erwähnt habe. Ich muss es nämlich in alle Wege für weniger wichtig halten, denjenigen Wert einer unbekannten Grösse auszumitteln, dessen Wahrscheinlichkeit die grösste ist, die ja doch immer nur unendlich klein bleibt, als vielmehr denjenigen, an welchen sich haltend man das am wenigsten nachteilige Spiel hat; oder wenn fa die Wahrscheinlichkeit des Wertes a für die Unbekannte x bezeichnet, so ist weniger daran gelegen, dass fa ein

124. Bezeichnet ε den Fehler in der Bestimmung einer Grösse und $\varphi(\varepsilon)d\varepsilon$ die Wahrscheinlichkeit, dass sein Wert zwischen den Grenzen ε und $\varepsilon + d\varepsilon$ liege, so nennt Gauss, gleichgiltig welcher Natur die Funktion $\varphi(\varepsilon)$ sei, die Grösse $\sqrt{k''}$, welche sich aus

$$k'' = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^2 \varphi(\varepsilon) d\varepsilon$$

ergibt, den mittleren Fehler jener Bestimmung und setzt fest, dass die Genauigkeit der Bestimmung umgekehrt proportional sei $\sqrt{k''}$, während eine dem k'' umgekehrt proportionale Grösse als Gewicht der Bestimmung bezeichnet wird*).

Diese Begriffe sollen zurecht bestehen, ob die Bestimmung aus einer unmittelbaren Beobachtung hervorgegangen oder aus Beobachtungen durch Rechnung abgeleitet worden ist.

Liegen mehrere Bestimmungen vor und sind $k_1'', k_2'', k_3'', \ldots$ die mittleren Werte ihrer Fehlerquadrate, so hat man, um ihre relativen Gewichte $p_1, p_2, p_3, \ldots$ zu erhalten, eine Bestimmung, deren mittleres Fehlerquadrat einen bestimmten Wert k'' hat, als Gewichtseinheit anzunehmen; es ist dann

$$k'' = k_1'' p_1 = k_2'' p_2 = k_3'' p_3 = \cdots.$$

Die Annahme

$$p_1 = \frac{1}{k_1''}, \qquad p_2 = \frac{1}{k_2''}, \qquad p_3 = \frac{1}{k_3''}, \qquad \ldots$$

insbesondere entspricht einer Gewichtseinheit, deren mittlerer Fehler die Einheit ist, in welcher man die Fehler ausdrückt.

Maximum werde, als daran, dass $\int fx \cdot F(x-a)dx$ ausgedehnt durch alle möglichen Werte des x ein Minimum werde, indem für F eine Funktion gewählt wird, die immer positiv und für grössere Argumente auf eine schickliche Art immer grösser wird. Dass man dafür das Quadrat wählt, ist rein willkürlich, und diese Willkürlichkeit liegt in der Natur der Sache. Ohne die bekannten ausserordentlich grossen Vorteile, die die Wahl des Quadrats gewährt, könnte man jede andere jenen Bedingungen entsprechende Funktion wählen ..." Briefwechsel zw. Gauss und Bessel, 1880, pag. 523.

*) Vgl. Art. 48 und 49.

125. Aus n Fehlergleichungen der allgemeinen Form

(1) $$\varepsilon_i = -l_i + a_i x + b_i y + c_i z + \cdots \qquad (i = 1, 2, \cdots n)$$

sind die vorteilhaftesten Werte der m ($< n$) Elemente $x, y, z, \ldots$ zu bestimmen.

Man multipliziere jede Fehlergleichung mit einem unbestimmten Faktor α_i, bilde die Summe

(2) $$[\alpha\varepsilon] = -[\alpha l] + [\alpha a]x + [\alpha b]y + [\alpha c]z + \cdots$$

und unterwerfe die n Faktoren α_i den m Bedingungen

(3) $$[\alpha a] = 1, \quad [\alpha b] = 0, \quad [\alpha c] = 0, \quad \cdots;$$

dadurch reduziert sich die Gleichung (2) auf

$$x = [\alpha l] + [\alpha\varepsilon]$$

und gibt, wenn man $[\alpha\varepsilon] = 0$ setzt, für das Element x die Bestimmung

(4) $$x = [\alpha l]$$

mit dem Fehler

(5) $$u = [\alpha\varepsilon].$$

Unter allen Bestimmungen, welche auf diesem Wege erhalten werden können, verdient jene den Vorzug, für welche der mittlere Wert von u^2 am kleinsten ist.

Um diesen mittleren Wert k_x'' zu erhalten, hat man die Wahrscheinlichkeit jeder möglichen Wertkombination der n Fehler $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ mit dem aus dieser Kombination entspringenden Werte von $u^2 = [\alpha\varepsilon]^2$ zu multiplizieren und die Summe aller so gebildeten Produkte zu nehmen. Es sei $\varphi_i(\varepsilon_i)d\varepsilon_i$ die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler der i^{ten} Beobachtung zwischen ε_i und $\varepsilon_i + d\varepsilon_i$ liege; die Funktion φ_i möge die einzige Bedingung erfüllen, dass $\varphi_i(-\varepsilon) = \varphi_i(\varepsilon)$. Dann ist

(6) $$k_x'' = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}[\alpha\varepsilon]^2\varphi_1(\varepsilon_1)\varphi_2(\varepsilon_2)\cdots\varphi_n(\varepsilon_n)d\varepsilon_1\, d\varepsilon_2\cdots d\varepsilon_n.$$

Da aber

$$[\alpha\varepsilon]^2 = [\alpha^2\varepsilon^2] + [\alpha_i\alpha_{i'}\varepsilon_i\varepsilon_{i'}], \qquad (i \lessgtr i')$$

so zerfällt das obige Integral in eine Summe von n Gliedern, deren erstes

$$\alpha_1^2 \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_1^2 \varphi_1(\varepsilon_1) d\varepsilon_1 \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_2(\varepsilon_2) d\varepsilon_2 \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(\varepsilon_n) d\varepsilon_n$$

ist und den Wert $\alpha_1^2 k_1''$ hat, weil $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_i(\varepsilon_i) d\varepsilon_i = 1$ ist, und in eine Summe von $n(n-1)$ Gliedern, deren erstes

$$\alpha_1 \alpha_2 \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_1 \varphi_1(\varepsilon_1) d\varepsilon_1 \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_2 \varphi_2(\varepsilon_2) d\varepsilon_2 \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_3(\varepsilon_3) d\varepsilon_3 \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(\varepsilon_n) d\varepsilon_n$$

ist und verschwindet wie alle übrigen, weil $\varphi_i(\varepsilon_i)$ eine gerade Funktion ist.

Mithin ist

$$k_x'' = [\alpha^2 k''] . \tag{7}$$

Um daher die mit dem kleinsten mittleren Fehler behaftete Bestimmung von x zu erhalten, ist das System der Faktoren α_i derart zu bestimmen, dass

$$[\alpha^2 k''] \text{ ein Minimum} \tag{8}$$

werde.

Hiermit sind wir bei derselben Bedingung angelangt, welche sich in Art. 114 aus dem Laplace'schen Prinzip ergab; folglich gelten auch die weiteren dort gefundenen Resultate.

Das Ergebnis dieser Untersuchung kann in dem Satze zusammengefasst werden: Unter allen linearen Kombinationen der Fehlergleichungen gibt diejenige, welche die Methode der kleinsten Quadrate vorschreibt, solche Bestimmungen für die unbekannten Elemente, bei welchen die kleinsten mittleren Fehler zu befürchten sind oder denen die grössten Gewichte zukommen, gleichgiltig, welchem Gesetze der Fehler der einzelnen Beobachtung folgt, wenn er nur von systematischen Teilen frei ist, und wie gross die Anzahl der Beobachtungen ist.

126. Bei der jetzt befolgten Analyse bietet sich aber auch ein einfaches Mittel dar, die mittleren Fehler in der Bestimmung der Elemente, beziehungsweise ihre relativen

Gewichte zu berechnen. Um dies zu zeigen, nehmen wir die Gleichungen (17), (18), (22) des Artikels 114 wieder auf mit dem Unterschiede, dass wir die dort mit $q_1, q_2, q_3, \ldots$ bezeichneten Multiplikatoren $q_{11}', q_{12}', q_{13}', \ldots$ nennen.

Hiernach ergeben sich die Faktoren α_i, welche der Bedingung (8) des vorigen Artikels entsprechen, aus den Gleichungen

$$
(9) \qquad
\begin{aligned}
k_1''\alpha_1 &= q_{11}'a_1 + q_{12}'b_1 + q_{13}'c_1 + \cdots \\
k_2''\alpha_2 &= q_{11}'a_2 + q_{12}'b_2 + q_{13}'c_2 + \cdots \\
k_3''\alpha_3 &= q_{11}'a_3 + q_{12}'b_3 + q_{13}'c_3 + \cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

wenn die Grössen $q_{11}', q_{12}', q_{13}', \ldots$ aus den Gleichungen

$$
(10) \qquad
\begin{aligned}
1 &= \left[\frac{aa}{k''}\right] q_{11}' + \left[\frac{ab}{k''}\right] q_{12}' + \left[\frac{ac}{k''}\right] q_{13}' + \cdots \\
0 &= \left[\frac{ba}{k''}\right] q_{11}' + \left[\frac{bb}{k''}\right] q_{12}' + \left[\frac{bc}{k''}\right] q_{13}' + \cdots \\
0 &= \left[\frac{ca}{k''}\right] q_{11}' + \left[\frac{cb}{k''}\right] q_{12}' + \left[\frac{cc}{k''}\right] q_{13}' + \cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

bestimmt worden sind; und die vorteilhaftesten Werte der Elemente sind aus den Gleichungen

$$
(11) \qquad
\begin{aligned}
\left[\frac{aa}{k''}\right] x + \left[\frac{ab}{k''}\right] y + \left[\frac{ac}{k''}\right] z + \cdots &= \left[\frac{al}{k''}\right] \\
\left[\frac{ba}{k''}\right] x + \left[\frac{bb}{k''}\right] y + \left[\frac{bc}{k''}\right] z + \cdots &= \left[\frac{bl}{k''}\right] \\
\left[\frac{ca}{k''}\right] x + \left[\frac{cb}{k''}\right] y + \left[\frac{cc}{k''}\right] z + \cdots &= \left[\frac{cl}{k''}\right] \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

zu rechnen.

Multipliziert man die Gleichungen (9) der Reihe nach mit $\frac{l_1}{k_1''}, \frac{l_2}{k_2''}, \frac{l_3}{k_3''}, \cdots$ und bildet die Summe, so ergibt sich im Hinblick auf (4), Art. 125,

$$
(12) \qquad x = \left[\frac{al}{k''}\right] q_{11}' + \left[\frac{bl}{k''}\right] q_{12}' + \left[\frac{cl}{k''}\right] q_{13}' + \cdots;
$$

multipliziert man dieselben Gleichungen der Reihe nach mit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ und summiert sie, so erhält man vermöge der Gleichungen (3) und (7), Art. 125,

$$
(13) \qquad [\alpha^2 k''] = k_x'' = q_{11}'.
$$

Wird derselbe Vorgang mit Bezug auf das Element y mit einem Faktorensystem β_i wiederholt, so kommt man zu den Gleichungen

$$(9^*)\qquad \begin{aligned} k_1''\beta_1 &= q_{21}'a_1 + q_{22}'b_1 + q_{23}'c_1 + \cdots \\ k_2''\beta_2 &= q_{21}'a_2 + q_{22}'b_2 + q_{23}'c_2 + \cdots \\ k_3''\beta_3 &= q_{21}'a_3 + q_{22}'b_3 + q_{23}'c_3 + \cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

in welchen die Grössen $q_{21}', q_{22}', q_{23}', \ldots$ bestimmt sind durch

$$(10^*)\qquad \begin{aligned} 0 &= \left[\frac{aa}{k''}\right] q_{21}' + \left[\frac{ab}{k''}\right] q_{22}' + \left[\frac{ac}{k''}\right] q_{23}' + \cdots \\ 1 &= \left[\frac{ba}{k''}\right] q_{21}' + \left[\frac{bb}{k''}\right] q_{22}' + \left[\frac{bc}{k''}\right] q_{23}' + \cdots \\ 0 &= \left[\frac{ca}{k''}\right] q_{21}' + \left[\frac{cb}{k''}\right] q_{22}' + \left[\frac{cc}{k''}\right] q_{23}' + \cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

während sich wie vorhin

$$(12^*)\qquad y = \left[\frac{al}{k''}\right] q_{21}' + \left[\frac{bl}{k''}\right] q_{22}' + \left[\frac{cl}{k''}\right] q_{23}' + \cdots$$

und

$$(13^*)\qquad [\beta^2 k''] = k_y'' = q_{22}'$$

ergibt.

Unter Anwendung eines weiteren Faktorensystems γ_i zum Zwecke der Bestimmung von z erhält man die entsprechenden Gleichungen

$$(9^{**})\qquad \begin{aligned} k_1''\gamma_1 &= q_{31}'a_1 + q_{32}'b_1 + q_{33}'c_1 + \cdots \\ k_2''\gamma_2 &= q_{31}'a_2 + q_{32}'b_2 + q_{33}'c_2 + \cdots \\ k_3''\gamma_3 &= q_{31}'a_3 + q_{32}'b_3 + q_{33}'c_3 + \cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

$$(10^{**})\qquad \begin{aligned} 0 &= \left[\frac{aa}{k''}\right] q_{31}' + \left[\frac{ab}{k''}\right] q_{32}' + \left[\frac{ac}{k''}\right] q_{33}' + \cdots \\ 0 &= \left[\frac{ba}{k''}\right] q_{31}' + \left[\frac{bb}{k''}\right] q_{32}' + \left[\frac{bc}{k''}\right] q_{33}' + \cdots \\ 1 &= \left[\frac{ca}{k''}\right] q_{31}' + \left[\frac{cb}{k''}\right] q_{32}' + \left[\frac{cc}{k''}\right] q_{33}' + \cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

$$(12^{**})\qquad z = \left[\frac{al}{k''}\right] q_{31}' + \left[\frac{bl}{k''}\right] q_{32}' + \left[\frac{cl}{k''}\right] q_{33}' + \cdots$$

$$(13^{**})\qquad [\gamma^2 k''] = k_z'' = q_{33}'.$$

Die Resultate (12), (12*), (12**) würden aber notwendig auch erhalten werden, wenn man das System (11) der Normalgleichungen auflöste derart, dass die Unbekannten $x, y, z, \ldots$ als lineare Formen der absoluten Glieder erscheinen (die sogen. unbestimmte Auflösung der Normalgleichungen).

Stellt man demnach die Lösung der Gleichungen (11) in der Form

$$x = \left[\frac{al}{k''}\right] q_{11}' + \left[\frac{bl}{k''}\right] q_{12}' + \left[\frac{cl}{k''}\right] q_{13}' + \cdots$$
$$y = \left[\frac{al}{k''}\right] q_{21}' + \left[\frac{bl}{k''}\right] q_{22}' + \left[\frac{cl}{k''}\right] q_{23}' + \cdots$$
$$z = \left[\frac{al}{k''}\right] q_{31}' + \left[\frac{bl}{k''}\right] q_{32}' + \left[\frac{cl}{k''}\right] q_{33}' + \cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

dar, so sind die die Quadrate der mittleren in diesen Bestimmungen zu befürchtenden Fehler

$$k_x'' = q_{11}', \qquad k_y'' = q_{22}', \qquad k_z'' = q_{33}', \quad \cdots.$$

Es mag bemerkt werden, dass die q' mit nicht-quadratischem Index paarweise gleich sind in dem Sinne, dass $q_{ik}' = q_{ki}'$. Es folgt dies einmal aus ihrer algebraischen Bedeutung als Subdeterminanten einer symmetrischen Determinante. Man erkennt es auch leicht, wenn man beispielsweise die Gleichungen (10) der Reihe nach mit $q_{21}', q_{22}', q_{23}', \ldots$ multipliziert und hierauf unter Rücksichtnahme auf (10*) addiert; es wird

$$q_{21}' = q_{12}' \quad \text{u. s. w.}$$

Aber auch aus der fehlertheoretischen Bedeutung der Grössen q' wird diese Beziehung sofort klar. Zunächst ist, wie schon gezeigt worden, q_{11}' das Quadrat des mittleren Fehlers von x; aus den Gleichungen (9*) folgt mit Rücksicht auf die Beziehungen (3), Art. 125, dass

$$q_{21}' = q_{12}' = [\alpha\beta k''];$$

dies aber ist der mittlere Wert von $[\alpha\varepsilon][\beta\varepsilon]$, also der Mittelwert des Produktes der in den Bestimmungen von x und y begangenen Fehler. In gleicher Weise bedeutet q_{13}' oder q_{31}' den Mittelwert des Produktes der Fehler in x und z u. s. w.

Aus diesen Bemerkungen geht hervor, dass

$$\begin{array}{llll} [\alpha\alpha k''], & [\alpha\beta k''], & [\alpha\gamma k''], \ldots & \text{und} \quad q'_{11}, q'_{12}, q'_{13}, \ldots \\ [\beta\alpha k''], & [\beta\beta k''], & [\beta\gamma k''], \ldots & \quad\quad q'_{21}, q'_{22}, q'_{23}, \ldots \\ [\gamma\alpha k''], & [\gamma\beta k''], & [\gamma\gamma k''], \ldots & \quad\quad q'_{31}, q'_{32}, q'_{33}, \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \quad\quad \ldots \end{array}$$

zwei äquivalente Grössensysteme sind.

127. An Stelle der Quadrate der mittleren Fehler $k_1'', k_2'', k_3'', \ldots$ der einzelnen Beobachtungen können aber auch ihre relativen Gewichte $p_1, p_2, p_3, \ldots$, bezogen auf eine Gewichtseinheit, deren mittlerer Fehler k'' zum Quadrat haben möge, eingeführt werden; wenn man die auf diese selbe Gewichtseinheit bezogenen Gewichte der Elemente mit $p_x, p_y, p_z, \ldots$ bezeichnet, so bestehen zwischen den genannten Grössen die Gleichungen

$$\begin{aligned} (14) \qquad & p_1 k_1'' = p_2 k_2'' = p_3 k_3'' = \cdots = k'' \\ & = p_x k_x'' = p_y k_y'' = p_z k_z'' = \cdots. \end{aligned}$$

Das System der Normalgleichungen, (11), Art. 126, wandelt sich dann um in

$$(11') \quad \begin{array}{l} [paa]x + [pab]y + [pac]z + \cdots = [pal] \\ [pba]x + [pbb]y + [pbc]z + \cdots = [pbl] \\ [pca]x + [pcb]y + [pcc]z + \cdots = [pcl] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ; \end{array}$$

setzt man ferner

$$\frac{q'_{ik}}{k''} = q_{ik},$$

so gehen die Gleichungen (10), (12), (13), Art. 126, über in

$$(10') \quad \begin{array}{l} 1 = [paa]q_{11} + [pab]q_{12} + [pac]q_{13} + \cdots \\ 0 = [pba]q_{11} + [pbb]q_{12} + [pbc]q_{13} + \cdots \\ 0 = [pca]q_{11} + [pcb]q_{12} + [pcc]q_{13} + \cdots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

$$(12') \quad x = [pal]q_{11} + [pbl]q_{12} + [pcl]q_{13} + \cdots$$

$$(13') \quad k''\left[\frac{\alpha\alpha}{p}\right] = k_x'' = k'' q_{11}$$

und eine ähnliche Umgestaltung erfahren die Gleichungen (10*), (12*), (13*); (10**), 12**), (13**) u. s. w.

Aus (14) aber folgt $\frac{k_x''}{k''} = \frac{1}{p_x}$, mithin ist

$$q_{11} = \frac{1}{p_x}. \tag{14'}$$

Stellt man also die Lösung der Gleichungen (11′) unter die Form

$$\begin{aligned}
x &= [pal]q_{11} + [pbl]q_{12} + [pcl]q_{13} + \cdots \\
y &= [pal]q_{21} + [pbl]q_{22} + [pcl]q_{23} + \cdots \\
z &= [pal]q_{31} + [pbl]q_{32} + [pcl]q_{33} + \cdots \\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot
\end{aligned}$$

so sind die reciproken Gewichte dieser Bestimmungen

$$\frac{1}{p_x} = q_{11}, \quad \frac{1}{p_y} = q_{22}, \quad \frac{1}{p_z} = q_{33}, \cdots$$

und die Quadrate der mittleren zu befürchtenden Fehler

$$k_x'' = k''q_{11}, \quad k_y'' = k''q_{22}, \quad k_z'' = k''q_{33}, \quad \cdots.$$

Vermöge dieser Bedeutung der Grössen $q_{11}, q_{22}, q_{33}, \cdots$ nennt man die Gleichungssysteme (10′) und die analogen (nicht angeschriebenen) (10′*), (10′**) die **Gewichtsgleichungen** für die Unbekannten $x, y, z, \ldots$ beziehungsweise.

Es bedarf kaum der Erwähnung, dass zwischen den Grössen q ähnliche Beziehungen existieren wie sie zwischen den q sind nachgewiesen worden. Insbesondere sind nun

$$\begin{array}{llll}
\left[\frac{\alpha\alpha}{p}\right], & \left[\frac{\alpha\beta}{p}\right], & \left[\frac{\alpha\gamma}{p}\right], \cdots & \text{und} \quad q_{11}, \quad q_{12}, \quad q_{13}, \cdots \\
\left[\frac{\beta\alpha}{p}\right], & \left[\frac{\beta\beta}{p}\right], & \left[\frac{\beta\gamma}{p}\right], \cdots & \qquad\quad q_{21}, \quad q_{22}, \quad q_{23}, \cdots \\
\left[\frac{\gamma\alpha}{p}\right], & \left[\frac{\gamma\beta}{p}\right], & \left[\frac{\gamma\gamma}{p}\right], \cdots & \qquad\quad q_{31}, \quad q_{32}, \quad q_{33}, \cdots \\
\cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot
\end{array}$$

äquivalente Grössensysteme. Sind die Beobachtungen von gleicher Genauigkeit und gilt eine einzelne als Gewichtseinheit, so lautet die Nebeneinanderstellung einfacher

$$\begin{array}{llll} [\alpha\alpha], & [\alpha\beta], & [\alpha\gamma], \ldots & \text{und} \quad q_{11}, \; q_{12}, \; q_{13}, \ldots \\ [\beta\alpha], & [\beta\beta], & [\beta\gamma], \ldots & \qquad\quad q_{21}, \; q_{22}, \; q_{23}, \ldots \\ [\gamma\alpha], & [\gamma\beta], & [\gamma\gamma], \ldots & \qquad\quad q_{31}, \; q_{32}, \; q_{33}, \ldots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

128. Für die Gleichung (6), Art. 125, welche dort in zureichender Weise begründet worden ist und einen speziellen Fall des allgemeinen Satzes darstellt, den Gauss im Art. 13 der Theoria combinat. observ. aufgestellt hat, ist von Glaisher*) eine Begründung gegeben worden, welche die Beziehungen zwischen der Laplace'schen Analyse einerseits und der Gauss'schen andererseits deutlich hervortreten lässt.

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Wert von $[\alpha\varepsilon]$ zwischen den Grenzen u und $u + du$ eingeschlossen sei, mit $\psi(u)du$ bezeichnet, hat man

$$(1) \qquad k_x'' = \int_{-\infty}^{\infty} u^2 \psi(u) du.$$

Nun ist aber

$$\psi(u)du = \int\int \cdots \int \varphi_1(\varepsilon_1)\varphi_2(\varepsilon_2)\cdots\varphi_n(\varepsilon_n)\, d\varepsilon_1 d\varepsilon_2 \cdots d\varepsilon_n,$$

wenn die Integration über das Wertgebiet

$$(2) \qquad u \leqq [\alpha\varepsilon] \leqq u + du$$

ausgedehnt wird. Mit Hilfe des zu Artikel 33 abgeleiteten Diskontinuitätsfaktors

$$\frac{du}{\pi}\int_0^{\infty} \cos\,([\alpha\varepsilon] - u)\Theta\, d\Theta,$$

welchem die Eigenschaft zukommt, der Einheit gleich zu sein oder zu verschwinden, jenachdem die Relation (2) erfüllt ist oder nicht, kann aber der Ausdruck für $\psi(u)du$ auf die Form

$$\psi(u)du = \frac{du}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} \varphi_1(\varepsilon_1)\cdots\varphi_n(\varepsilon_n)\cos([\alpha\varepsilon] - u)\Theta\, d\varepsilon_1 \cdots d\varepsilon_n d\Theta$$

gebracht werden. Setzt man dies in die Gleichung (1) ein, so wird

*) Mem. of the R. Astron. Soc., XXXIX, pag. 109 flg.

$$k_x'' = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_1(\varepsilon_1)\cdots\varphi_n(\varepsilon_n)d\varepsilon_1\cdots d\varepsilon_n\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}u^2\cos([\alpha\varepsilon]-u)\Theta d\Theta du.$$

Nach Fourier's Theorem ist aber

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}u^2\cos([\alpha\varepsilon]-u)\Theta d\Theta du = [\alpha\varepsilon]^2,$$

folglich

$$(3)\quad k_x'' = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}[\alpha\varepsilon]^2\varphi_1(\varepsilon_1)\varphi_2(\varepsilon_2)\cdots\varphi_n(\varepsilon_n)d\varepsilon_1 d\varepsilon_2\cdots d\varepsilon_n$$

übereinstimmend mit der in Rede stehenden Gleichung des Artikels 125.

Allgemein ist der mittlere Wert von $u^m = [\alpha\varepsilon]^m$

$$(4)\quad k_x^{(m)} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}[\alpha\varepsilon]^m\varphi_1(\varepsilon_1)\varphi_2(\varepsilon_2)\cdots\varphi_n(\varepsilon_n)d\varepsilon_1 d\varepsilon_2\cdots d\varepsilon_n$$

und in derselben Weise wird der Mittelwert irgend einer Funktion E der Fehler ε erhalten, wenn man in dem Integral der rechten Seite von (3) E an die Stelle von $[\alpha\varepsilon]^2$ treten lässt.

Bei Laplace muss, vermöge der Unstetigkeit der Funktion $|[\alpha\varepsilon]|$, welche ihm als Moment des Fehlers u dient, $\psi(u)du$ für sich bestimmt werden, ehe an die Berechnung von

$$\int_0^{\infty}u\psi(u)du$$

geschritten wird.

129. Die Nebeneinanderstellung der beiden Beweise, welche Gauss für die Methode der kleinsten Quadrate gegeben, muss auf den ersten Blick überraschen und die Frage nahe legen, wie es möglich sei, dass aus so wesentlich verschiedenen Voraussetzungen und Prinzipien dasselbe Resultat hervorgehen kann. Während der erste Beweis auf ein ganz spezielles Fehlergesetz sich gründet, macht der zweite von der Natur dieses Gesetzes sich so weit frei, dass er nur die eine Voraussetzung benötigt, das Gesetz sei durch eine gerade Funktion dargestellt.

Bertrand*) hat gezeigt, dass die Annahme über die Fehler, welche Gauss im Art. 18 der Theoria combin. observ. aufgestellt hat, ausreicht, um diesen scheinbaren Widerspruch aufzuklären. Die Fehler werden an der berufenen Stelle als so klein vorausgesetzt, dass man ihre Quadrate und Produkte den ersten Potenzen gegenüber vernachlässigen darf.

Gleiche Genauigkeit der Beobachtungen vorausgesetzt und die Methode der kleinsten Quadrate vorweggenommen, soll dem Prinzipe des ersten Beweises gemäss das Produkt

$$\varphi(\varepsilon_1)\varphi(\varepsilon_2)\ldots\varphi(\varepsilon_n)$$

ein Maximum werden, wenn

$$\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \cdots + \varepsilon_n^2$$

ein Minimum ist. Demzufolge muss jenes Produkt so lange konstant bleiben, als diese Summe denselben Wert behält, oder es muss

$$\varphi(\varepsilon_1)\varphi(\varepsilon_2)\cdots\varphi(\varepsilon_n) = F(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \cdots + \varepsilon_n^2)$$

sein, und diese Funktionalgleichung führt zu

$$(1) \qquad \varphi(\varepsilon) = Ce^{-h^2\varepsilon^2}$$

als der einzigen Form von φ, welche mit jenem Prinzip vereinbar ist.

Im zweiten Beweise bleibt $\varphi(\varepsilon)$ unbekannt. Vermöge der über die Grösse der Fehler gemachten Annahme kann es durch eine Entwicklung

$$\varphi(\varepsilon) = \varphi(0) + \varphi'(0)\varepsilon + \frac{\varphi''(0)}{1\cdot 2}\varepsilon^2 + \frac{\varphi'''(0)}{1\cdot 2\cdot 3}\varepsilon^3 + \frac{\varphi^{\mathrm{IV}}(0)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\varepsilon^4 + \cdots$$

ersetzt werden. Weil aber die Beobachtungsfehler als von regelmässigen Teilen befreit vorausgesetzt werden, so ist $\varphi(-\varepsilon) = \varphi(\varepsilon)$, daher $\varphi'(0) = 0$ und $\varphi'''(0) = 0$. Mit demselben Rechte ferner, mit welchem das Quadrat neben der ersten Potenz vernachlässigt wird, darf auch die vierte Potenz neben dem Quadrat unterdrückt werden. Dann aber reduziert sich die obige Entwicklung auf

$$(2) \qquad \varphi(\varepsilon) = \varphi(0) + \frac{\varphi''(0)}{2}\varepsilon^2.$$

*) Compt. rend., CVI, pag. 1115 flg. — Calc. des Probab., art. 204.

Unter denselben Annahmen kann aber auch

$$Ce^{-h^2\varepsilon^2} = C - Ch^2\varepsilon^2$$

gesetzt werden, und beides fällt zusammen, wenn man C und h so bestimmt, dass

$$C = \varphi(0), \quad Ch^2 = -\frac{\varphi''(0)}{2}$$

wird*).

Unter den getroffenen Annahmen ist also $\varphi(\varepsilon)$, welches auch sonst seine Form sei, zurückführbar auf jene Exponentialfunktion, welche dem ersten Beweise zu Grunde liegt. Nach dieser Darlegung kann, bemerkt Bertrand, das Ergebnis des zweiten Beweises ebenso wenig befremden wie die Thatsache, dass die Gesetze der Krümmung aller Kurven, welche durch einen Punkt einer krummen Fläche gezogen werden können, dieselben sind für alle Flächen.

Der hohe Wert des zweiten Beweises liegt in dem neuen Prinzip, welches ihm zu Grunde liegt. So lange man bei dem ersten Beweise stehen bleibt, verlieren die Resultate der Methode der kleinsten Quadrate ihre Bedeutung, sobald man nicht annehmen kann, dass die Beobachtungsfehler jenes spezielle Fehlergesetz befolgen. Der zweite Beweis aber misst den Resultaten Eigenschaften bei, welche unabhängig sind von der speziellen Form des Fehlergesetzes.

§ 6. Ivory's sogen. Beweise.

130. Nicht ohne Interesse sind die Beweise, welche Ivory**) für die Methode der kleinsten Quadrate gegeben hat. Sie gehen alle auf dasselbe Ziel hinaus, nämlich das durch diese Methode vorgeschriebene Verfahren ohne wahrscheinlichkeitstheoretische Betrachtungen zu rechtfertigen, da Ivory der Gegenstand solchen Betrachtungen fremd zu sein schien. Mehr noch als die Beweise selbst verdient die treffende

---

*) Der analytische Inhalt dieser Auseinandersetzung besteht darin, dass jede gerade Funktion, welche an der Stelle Null ein Maximum besitzt, in der Umgebung dieser Stelle durch die Funktion (1) ersetzt werden könne.

**) Tilloch's Philosoph. Magaz., vol. 65 (1825) und 68 (1826).

Kritik, welche ihnen durch Ellis*) und Glaisher**) zu Teil wurde, Beachtung um so mehr, als man solchen Scheinbeweisen auch anderwärts mitunter begegnet.

131. Der erste Beweis beruht auf einer vagen Analogie der vorgelegten Aufgabe mit dem Hebelgesetz. Ivory bemerkt, dass in der Gleichung

$$\varepsilon_i = - l_i + a_i x$$

der Einfluss des Fehlers ε_i auf den Wert von x abnimmt, wenn a_i wächst und umgekehrt, und schliesst daraus, dass der Fall genau ähnlich sei dem eines Hebels, welcher eine gegebene Wirkung erzielen soll: die Länge des Hebelarmes muss umgekehrt proportional sein der angreifenden Kraft. Die Bedingung also, welche erfüllt sein muss, wenn die Beobachtungen in der vorteilhaftesten Weise kombiniert werden sollen, fällt überein mit der Bedingung des Gleichgewichtes an einem Hebel, an welchem die Kräfte $a_1, a_2, \ldots a_n$ an den Hebelarm $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ wirken; diese Bedingung lautet

$$[\alpha \varepsilon] = 0$$

und führt zu dem durch die Methode der kleinsten Quadrate vorgezeichneten Resultat***).

Der Beweis stützt sich auf die ganz willkürliche Annahme, dass, weil der Einfluss des Fehlers — was zugegeben werden kann — mit dem Wachsen von a abnimmt, er dieser Grösse umgekehrt proportional sei. Die Lösung der wesentlichen Frage, die Form der Funktion von a festzustellen, welche den Einfluss des Fehlers ausdrückt, wird hier durch einen auf vager Analogie beruhenden Schluss umgangen.

132. Auch der zweite Beweis baut sich auf einer Analogie auf, gegen die ein gewichtiger Einwand erhoben werden muss. Die relative Genauigkeit kann nach dem mittleren Fehlerquadrate beurteilt werden, und diejenige unter

*) Cambridge Philosoph. Transact., VIII; diese Quelle ist bei Wiedergabe der Beweise benützt worden.

**) Mem. of the R. Astron. Soc., XXXIX.

***) Einen ähnlichen Beweis, unabhängig von Ivory, gab 1851 Hossard, Nouv. Annal. Mathém., X, pag. 456 sq.

mehreren Beobachtungsreihen wird als die beste zu gelten haben, bei welcher das mittlere Fehlerquadrat am kleinsten ist. Ebenso ziehen verschiedene Wertsysteme der unbekannten Elemente $x, y, z, \ldots$ vermöge der Fehlergleichungen verschiedene Systeme von Fehlern nach sich, welche wie die Fehler eben so vieler Beobachtungsreihen angesehen werden können: dasjenige Wertsystem der Elemente $x, y, z, \ldots$ ist also allen andern vorzuziehen, für welches die Summe der Quadrate der zurückbleibenden Fehler am kleinsten ist.

Gegen den ersten Teil dieser Aufstellung kann nichts Wesentliches vorgebracht werden; der Durchschnitt der Quadrate der wirklich begangenen oder wahren Fehler ist in der That geeignet, als Präzisionsmaass einer Beobachtungsreihe zu dienen, wenn diese Wahl auch eine Willkür in sich schliesst, da jede andere gerade Potenz der Fehler eben so verwendet werden könnte; aber denselben Schluss auf die aus angenommenen Werten der Elemente gerechneten oder scheinbaren Fehler zu übertragen, lässt sich in keiner Weise rechtfertigen.

133. In einem dritten Beweise geht Ivory von der Bemerkung aus, dass die Beobachtungen insofern unabhängig von einander seien, als der Fehler, welcher bei der einen begangen wird, keinen Einfluss hat auf den Fehler einer andern, und sucht dann zu zeigen, dass die Methode der kleinsten Quadrate das einzige Verfahren sei, welches dieser Unabhängigkeit der Fehler Rechnung trägt.

In dem angedeuteten Sinne sind die Beobachtungsfehler in der That unabhängig von einander, sie sind es aber nicht mit Rücksicht auf den Zusammenhang der Beobachtungen. Bei direkten Beobachtungen einer und derselben Grösse zieht doch die Kenntnis eines Fehlers die Kenntnis aller übrigen nach sich, und bei n vermittelnden Beobachtungen mit m Unbekannten sind mit m Fehlern auch alle übrigen gegeben. Aber auch abgesehen von dieser Bemerkung ist der Beweis, den Ivory auf dem angedeuteten Gedanken aufbaut, hinfällig. Er leitet aus n Fehlergleichungen von der Form

$$\varepsilon_i = - l_i + a_i x$$

für x den Wert

$$x = \frac{[al]}{[aa]} + \frac{[a\varepsilon]}{[aa]}$$

und hieraus wieder

$$\varepsilon_i = -l_i + a_i \frac{[al]}{[aa]} + a_i \frac{[a\varepsilon]}{[aa]}$$

als den der i^{ten} Beobachtung anhaftenden Fehler ab. Diese Fehler seien aber nicht unabhängig von einander, weil sie sämtlich durch $[a\varepsilon]$ ausgedrückt sind, werden es vielmehr nur dann, wenn $[a\varepsilon] = 0$ gesetzt wird, wodurch man die Methode der kleinsten Quadrate als das rechtmässige Verfahren gekennzeichnet habe. Und da alsdann

$$\varepsilon_i = -l_i + a_i \frac{[al]}{[aa]}$$

ist, so erscheine jeder Fehler nur durch die ihm zugehörige Beobachtung bestimmt.

Beide Behauptungen, dass nämlich die Fehler nunmehr unabhängig von einander seien und dass jeder nur durch seine zugeordnete Beobachtung bestimmt werde, sind unrichtig, da alle Fehlerausdrücke die aus allen Beobachtungen zusammengesetzte Grösse $[al]$ enthalten.

Am deutlichsten ergibt sich die Hinfälligkeit dieses Beweises aus folgender Bemerkung Ellis'. Hätte Ivory behufs Ableitung des Wertes für x die Fehlergleichungen statt mit a_i mit irgend einer Funktion $f(a_i)$ dieser Grösse multipliziert und addiert, so wären die Gleichungen

$$x = \frac{[f(a)l]}{[af(a)]} + \frac{[f(a)\varepsilon]}{[af(a)]}$$

$$\varepsilon_i = -l_i + a_i \frac{[f(a)l]}{[af(a)]} + a_i \frac{[f(a)\varepsilon]}{[af(a)]}$$

entstanden und auf diese könnten Wort für Wort die nämlichen Schlüsse angewandt werden. Dadurch wäre bewiesen, dass die zweckmässigste Methode der Kombination der Beobachtungen in der Anwendung der Faktoren $f(a_i)$ besteht, und da f ganz willkürlich ist, so wäre damit eine Unendlichkeit einander widersprechender Resultate aufgestellt, deren jedes den gleichen Anspruch hätte als das vorteilhafteste zu gelten.

§ 7. Beurteilung der Genauigkeit der Beobachtungen und der aus ihnen abgeleiteten Werte der Elemente.

134. In den Untersuchungen der nun folgenden drei Paragraphen stellen wir uns auf den Boden des zweiten Gauss'schen Beweises.

Zur Beurteilung der Genauigkeit der Beobachtungen sowohl als der aus ihnen abgeleiteten Werte für die unbekannten Elemente ist es notwendig, den mittleren Fehler einer Beobachtung zu kennen, falls man allen Beobachtungen gleiche Genauigkeit zuschreibt, oder den mittleren Fehler einer Beobachtung vom Gewichte Eins, falls die Beobachtungen ungleich genau und ihre relativen Gewichte bekannt sind.

Die Erledigung dieser Frage böte keine Schwierigkeit, wenn die wahren Fehler ε_i bekannt wären.

Bezeichnet n die Anzahl der Beobachtungen, ε_i den unbestimmten Fehler der i^{ten} Beobachtung und $\varphi(\varepsilon)$ das für alle Beobachtungen gleich bleibende Fehlergesetz, so ist der mittlere Wert von $\frac{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\cdots+\varepsilon_n^2}{n}$ dargestellt durch das Integral (s. Gleichung (4), Art. 128 und die darauffolgende Bemerkung)

$$(1)\qquad \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\cdots+\varepsilon_n^2}{n}\,\varphi(\varepsilon_1)\varphi(\varepsilon_2)\cdots\varphi(\varepsilon_n)d\varepsilon_1 d\varepsilon_2\cdots d\varepsilon_n,$$

dessen Wert sich, wie man leicht erkennt, auf

$$(2)\qquad \int_{-\infty}^{\infty}\varepsilon^2\varphi(\varepsilon)d\varepsilon = k''$$

reduziert. Der wirklich beobachtete Wert von $\frac{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\cdots+\varepsilon_n^2}{n}$ kann, jenachdem der Zufall es fügt, ebenso wie der beobachtete Wert des einzelnen Fehlerquadrates grösser oder kleiner sein als dieser Mittelwert, aber der Unterschied beider wird nach den Grundlehren der Wahrscheinlichkeitsrechnung mutmaasslich um so kleiner sein, je grösser die Anzahl der Fehler, weil man dann mit um so mehr Recht

erwarten darf, dass die Fehlerquadrate, welche unter dem mittleren Wert k'' liegen, aufgewogen werden durch solche, welche ihn überschreiten. In Ermangelung einer weiteren Kenntnis der Sache setzt man den mittleren dem aus der Beobachtung hervorgegangenen Wert gleich und erhält so zur Bestimmung des Quadrates des mittleren Fehlers einer Beobachtung die Gleichung

$$k'' = \frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}. \tag{3}$$

Bezeichnet wieder n die Anzahl der Beobachtungen, ε_i den unbestimmten Fehler der i^{ten} Beobachtung, $\varphi_i(\varepsilon_i)$ das Gesetz, welchem er unterworfen ist, p_i das relative Gewicht dieser Beobachtung, so ist der mittlere Wert von $\frac{p_1\varepsilon_1^2 + p_2\varepsilon_2^2 + \cdots + p_n\varepsilon_n^2}{n}$ ausgedrückt durch das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\frac{p_1\varepsilon_1^2 + p_2{}^2\varepsilon_2^2 + \cdots + p_n\varepsilon_n^2}{n}\,\varphi_1(\varepsilon_1)\varphi_2(\varepsilon_2)\cdots \\ \cdots\varphi_n(\varepsilon_n)\,d\varepsilon_1\,d\varepsilon_2\ldots d\varepsilon_n, \tag{4}$$

welches sich aber auflöst in die Summe einfacher Integrale

$$\frac{1}{n}\left\{p_1\int_{-\infty}^{\infty}\varepsilon_1^2\varphi_1(\varepsilon_1)d\varepsilon_1 \right. \\ \left. + p_2\int_{-\infty}^{\infty}\varepsilon_2^2\varphi_2(\varepsilon_2)d\varepsilon_2 + \cdots + p_n\int_{-\infty}^{\infty}\varepsilon_n^2\varphi_n(\varepsilon_n)d\varepsilon_n\right\}, \tag{5}$$

deren Wert gleichkommt $\frac{p_1k_1'' + p_2k_2'' + \cdots + p_nk_n''}{n}$; bezeichnet aber k'' das Quadrat des mittleren Fehlers einer Beobachtung vom Gewichte Eins, so ist $p_1k_1'' = p_2k_2'' = \cdots = p_nk_n'' = k''$, jener Mittelwert ist also gleichbedeutend mit k''. Setzt man wie oben diesen Mittelwert dem aus der Beobachtung wirklich hervorgegangenen Werte der betrachteten Funktion gleich, so bekommt man zur Bestimmung des Quadrats des mittleren Fehlers der Gewichtseinheit die Gleichung

$$k'' = \frac{[p\varepsilon\varepsilon]}{n}. \tag{6}$$

135. Wenn aber, wie es in der Praxis immer der Fall sein wird, nicht die Beobachtungsfehler ε_i, sondern diejenigen Korrektionen (scheinbaren Fehler) λ_i bekannt sind, welche an den Beobachtungen angebracht werden müssen, um die Fehlergleichungen vereinbar zu machen mit denjenigen Werten der Elemente, welche die Methode der kleinsten Quadrate geliefert hat, dann ist die Aufgabe einer solchen direkten Lösung nicht fähig.

Die Lösung, welche Gauss*) für diesen Fall gegeben, gründet sich auf das merkwürdige algebraische Theorem, dass sich die Summe der Quadrate der scheinbaren Fehler, d. i. $[\lambda\lambda]$ im Falle gleich genauer Beobachtungen, oder die Summe $[p\lambda\lambda]$ im Falle von Beobachtungen ungleichen Gewichtes als quadratische Form der Beobachtungsfehler ε_i mit vollkommen bestimmten Koeffizienten darstellen lasse.

Durch Anwendung des Prinzips, den mittleren Wert dieser quadratischen Form ihrem wahren und bekannten Werte $[\lambda\lambda]$, beziehungsweise $[p\lambda\lambda]$, den er, jenachdem der Zufall es fügt, ebensowohl über- als unterschreiten kann, gleich zu setzen, ergibt sich eine Bestimmung für den mittleren Fehler einer Beobachtung, beziehungsweise der Gewichtseinheit.

Den Beweis des erwähnten Theorems führen wir für den allgemeineren Fall ungleicher Gewichte und nach einem Verfahren durch, welches zugleich eine von der früheren abweichende Darstellung des ganzen Problems in sich schliesst.

136. Jedes System von Änderungen e_i, welche man an den Beobachtungen l_i anbringen kann, um die n zwischen den letzteren und den m $(< n)$ unbekannten Elementen $x, y, z, \ldots$ bestehenden Gleichungen

$$(1)\quad 0 = -(l_i + e_i) + a_i x + b_i y + c_i z + \cdots,\ \text{Gewicht}\ p_i,\ (i = 1, 2, \cdots n)$$

vereinbar zu machen, genügt $n - m = v$ linearen Gleichungen, deren Koeffizienten völlig bestimmt sind durch die Koeffizienten $a_i, b_i, c_i, \ldots$ und die Beobachtungsresultate l_i. Man erhält diese Gleichungen durch Elimination der m Grössen $x, y, z, \ldots$ zwischen den n Gleichungen (1); sie seien

*) Theoria combinat. observ., pars poster., art. 38.

$$
(2) \qquad
\begin{aligned}
A_1 e_1 + A_2 e_2 + \cdots + A_n e_n &= w_1 \\
B_1 e_1 + B_2 e_2 + \cdots + B_n e_n &= w_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
N_1 e_1 + N_2 e_2 + \cdots + N_n e_n &= w_\nu .
\end{aligned}
$$

Aus dem Bau der Gleichungen (1), insbesondere aus der Art und Weise, wie l_i und e_i mit einander verbunden sind, geht hervor, dass die Grössen $-w_1$, $-w_2$, ... aus den Grössen $l_1, l_2, \ldots$ ebenso zusammengesetzt sind wie $w_1, w_2, \ldots$ aus den Grössen $e_1, e_2, \ldots$, so dass

$$- w_1 = A_1 l_1 + A_2 l_2 + \cdots + A_n l_n$$

u. s. w.; sie drücken die Widersprüche aus, welche zwischen den Beobachtungsergebnissen infolge der ihnen anhaftenden Fehler bestehen und sind demnach, gute Beobachtungen vorausgesetzt, kleine Grössen; sie verschwänden völlig, wenn die Beobachtungen fehlerfrei oder trotz der ihnen anhaftenden Fehler durch Zufalls Fügung widerspruchsfrei wären.

Dem Gleichungssystem (2) genügen notwendig auch die Substitutionen

$$(3) \qquad e_i = \varepsilon_i$$

und

$$(4) \qquad e_i = \lambda_i .$$

Unter den unendlich vielen möglichen Systemen e_i ist das besondere System λ_i dadurch ausgezeichnet, dass es die Summe $[pee]$ in Bezug auf die Grössen $x, y, z, \ldots$ zu einem Minimum macht; dies aber bedeutet so viel, als dass für dieses System die Summe $[pee]$ unter Erfüllung der ν Bedingungsgleichungen (2) zu einem Minimum wird. Das System λ_i ist demnach mit demjenigen System e_i identisch, welches die Funktion

$$[pee] - 2k_1([Ae] - w_1) - 2k_2([Be] - w_2) - \cdots - 2k_\nu([Ne] - w_\nu)$$

zu einem absoluten Minimum macht.

Daraus folgt

$$
(5) \qquad
\begin{aligned}
p_1 \lambda_1 &= A_1 k_1 + B_1 k_2 + \cdots + N_1 k_\nu \\
p_2 \lambda_2 &= A_2 k_1 + B_2 k_2 + \cdots + N_2 k_\nu \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
p_n \lambda_n &= A_n k_1 + B_n k_2 + \cdots + N_n k_\nu ,
\end{aligned}
$$

wobei die ν Multiplikatoren $k_1, k_2, \ldots k_\nu$ mit Rücksicht auf die Gleichungen (2), (4) aus dem Gleichungssystem

$$(6)\qquad \begin{array}{l} \left[\frac{AA}{p}\right] k_1 + \left[\frac{AB}{p}\right] k_2 + \cdots + \left[\frac{AN}{p}\right] k_\nu = w_1 \\ \left[\frac{BA}{p}\right] k_1 + \left[\frac{BB}{p}\right] k_2 + \cdots + \left[\frac{BN}{p}\right] k_\nu = w_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \left[\frac{NA}{p}\right] k_1 + \left[\frac{NB}{p}\right] k_2 + \cdots + \left[\frac{NN}{p}\right] k_\nu = w_\nu \end{array}$$

zu bestimmen sind.

Multipliziert man die Gleichungen (5) der Reihe nach mit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ und bildet die Summe, unter Beachtung der Gleichungen, welche aus (2) durch die Substitutionen (4) hervorgehen, so erhält man

$$(7)\qquad [p\lambda\lambda] = k_1 w_1 + k_2 w_2 + \cdots k_\nu w_\nu .$$

Vermöge der Gleichungen (6) sind $k_1, k_2, \ldots k_\nu$ als lineare Formen der $w_1, w_2, \ldots w_\nu$ darstellbar; die rechte Seite von (7) ist somit eine quadratische Form der w_i. Da ferner $w_1, w_2, \ldots w_\nu$ aus den Gleichungen (2) durch die Substitution (3) als lineare Formen der ε_i hervorgehen, so ist schliesslich die rechte Seite von (7) eine quadratische Form der ε_i mit bekannten Koeffizienten, womit das erwähnte Theorem von Gauss erwiesen ist.

Aus (7) ergibt sich eine andere Darstellung für $[p\lambda\lambda]$, wenn man an die Stelle von $w_1, w_2, \ldots w_\nu$ die Werte aus (2), (3) einsetzt; es wird nämlich

$$\begin{aligned} [p\lambda\lambda] = & (A_1 k_1 + B_1 k_2 + \cdots + N_1 k_\nu)\varepsilon_1 \\ & + (A_2 k_1 + B_2 k_2 + \cdots + N_2 k_\nu)\varepsilon_2 \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + (A_n k_1 + B_n k_2 + \cdots + N_n k_\nu)\varepsilon_n , \end{aligned}$$

d. i. im Hinblick auf die Gleichungen (5)

$$(7^*)\qquad [p\lambda\lambda] = p_1\lambda_1\varepsilon_1 + p_2\lambda_2\varepsilon_2 + \cdots + p_n\lambda_n\varepsilon_n .$$

Wie schon erwähnt, enthält der obige Vorgang eine neue Lösung des Problems. Hat man nämlich durch Elimination der Elemente $x, y, z, \ldots$ aus dem System (1) das System (2) der Bedingungsgleichungen abgeleitet und mit Hilfe der Koeffizienten dieses letzteren das System (6)

der Normalgleichungen gebildet, hierauf die Grössen $k_1, k_2, \dots k_\nu$ — die Korrelaten — bestimmt, so ist alles gegeben, um aus den Gleichungen (5) — den Korrelatengleichungen — diejenigen Werte der $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ zu berechnen, welche in (1) an die Stelle von $e_1, e_2, \dots e_n$ gebracht diese Gleichungen widerspruchsfrei machen, so dass m beliebige unter ihnen geeignet sind, die Werte der Elemente $x, y, z, \dots$ zu bestimmen; und diese Werte sind die nämlichen, welche die Methode der kleinsten Quadrate liefert.

Indessen gibt es eine Form des Problems, bei welcher die Gleichungen (2) unmittelbar gegeben sind als eine Folgerung der theoretischen Bedingungen, welchen die beobachteten Grössen genügen müssen. Alsdann ist mit der Berechnung der $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ die Aufgabe insofern abgeschlossen, als dadurch solche Änderungen an den Beobachtungen bestimmt sind, welche sie mit den theoretischen Bedingungen in Einklang bringen und den mittleren Fehler einer jeden Beobachtung möglichst klein machen. Man spricht in einem solchen Falle von der Ausgleichung bedingter Beobachtungen.

137. Die zweite zu lösende Aufgabe ist die Bestimmung des Mittelwertes der quadratischen Form der ε_i, welche die rechte Seite der Gleichung (7) oder (7*) bildet. Bezeichnet man diese Form allgemein mit $\sum a_{ij}\varepsilon_i\varepsilon_j$, so ist ihr mittlerer Wert

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\sum a_{ij}\varepsilon_i\varepsilon_j \,.\, \varphi_1(\varepsilon_1)\varphi_2(\varepsilon_2)\dots\varphi_n(\varepsilon_n)\,d\varepsilon_1\,d\varepsilon_2\dots d\varepsilon_n$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\sum a_{ii}\varepsilon_i^2 \,.\, \varphi_1(\varepsilon_1)\varphi_2(\varepsilon_2)\dots\varphi_n(\varepsilon_n)\,d\varepsilon_1\,d\varepsilon_2\dots d\varepsilon_n$$

$$=\sum a_{ii}k_i'',$$

weil die auf Glieder von der Form $a_{ij}\varepsilon_i\varepsilon_j$ $(i \lesseqgtr j)$ bezüglichen Anteile des Integrals vermöge der Natur der Funktionen φ_i Null ergeben.

Aus (7*) aber entnimmt man, dass der Koeffizient a_{ii}

von ε_i^2 ausgedrückt ist durch $p_i \frac{\partial \lambda_i}{\partial \varepsilon_i}$, und da $p_i k_i'' = k''$, so ist der obige Mittelwert auch

$$(8) \qquad = k'' \sum \frac{\partial \lambda_i}{\partial \varepsilon_i}.$$

Aus (5) aber folgt

$$p_i \frac{\partial \lambda_i}{\partial \varepsilon_i} = A_i \frac{\partial k_1}{\partial \varepsilon_i} + B_i \frac{\partial k_2}{\partial \varepsilon_i} + \cdots + N_i \frac{\partial k_\nu}{\partial \varepsilon_i},$$

so dass zunächst

$$(9) \quad \sum \frac{\partial \lambda_i}{\partial \varepsilon_i} = \sum \frac{A_i}{p_i} \frac{\partial k_1}{\partial \varepsilon_i} + \sum \frac{B_i}{p_i} \frac{\partial k_1}{\partial \varepsilon_i} + \cdots + \sum \frac{N_i}{p_i} \frac{\partial k_\nu}{\partial \varepsilon_i},$$

wobei die Summierungen sich auf $i = 1, 2, \cdots n$ erstrecken. Da nun $k_1, k_2, \ldots k_\nu$ lineare Formen der $w_1, w_2, \ldots w_\nu$ und diese wieder lineare Formen der $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_\nu$ sind, so hat man weiter

$$\frac{\partial k_1}{\partial \varepsilon_i} = \frac{\partial k_1}{\partial w_1} \frac{\partial w_1}{\partial \varepsilon_i} + \frac{\partial k_1}{\partial w_2} \frac{\partial w_2}{\partial \varepsilon_i} + \cdots + \frac{\partial k_1}{\partial w_\nu} \frac{\partial w_\nu}{\partial \varepsilon_i}$$

$$= A_i \frac{\partial k_1}{\partial w_1} + B_i \frac{\partial k_1}{d w_2} + \cdots + N_i \frac{\partial k_1}{\partial w_\nu},$$

woraus sich für das erste Glied der rechten Seite von (9) die Darstellung ergibt

$$(10) \sum \frac{A_i}{p_i} \frac{\partial k_1}{\partial \varepsilon_i} = \left[\frac{AA}{p}\right] \frac{\partial k_1}{\partial w_1} + \left[\frac{AB}{p}\right] \frac{\partial k_1}{\partial w_2} + \cdots + \left[\frac{AN}{p}\right] \frac{\partial k_1}{\partial w_\nu}.$$

Andererseits folgt aus dem Gleichungssystem (6), wenn man seine Determinante mit Δ und die den Elementen der ersten Kolonne adjungierten Subdeterminanten mit $\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_\nu$ bezeichnet,

$$\Delta k_1 = w_1 \Delta_1 + w_2 \Delta_2 + \cdots + w_\nu \Delta_\nu,$$

während

$$\Delta = \left[\frac{AA}{p}\right] \Delta_1 + \left[\frac{AB}{p}\right] \Delta_2 + \cdots + \left[\frac{AN}{p}\right] \Delta_\nu;$$

die erste dieser Gleichungen gibt

$$\Delta_1 = \Delta \frac{\partial k_1}{\partial w_1}, \quad \Delta_2 = \Delta \frac{\partial k_1}{\partial w_2}, \quad \cdots \quad \Delta_\nu = \Delta \frac{\partial k_1}{\partial w_\nu}$$

und setzt man diese Werte in die zweite ein, so entsteht

$$\Delta = \Delta \left\{ \left[\frac{AA}{p}\right] \frac{\partial k_1}{\partial w_1} + \left[\frac{AB}{p}\right] \frac{\partial k_1}{\partial w_2} + \cdots + \left[\frac{AN}{p}\right] \frac{\partial k_1}{\partial w_\nu} \right\},$$

woraus in Verbindung mit (10)

$$\sum \frac{A_i}{p_i} \frac{\partial k_1}{\partial \varepsilon_i} = 1$$

erhalten wird.

Auf demselben Wege zeigt man, dass auch jedes weitere Glied der rechten Seite von (9) den Wert 1 hat, und da die Anzahl der Glieder ν ist, so hat man schliesslich

$$\sum \frac{\partial \lambda_i}{\partial \varepsilon_i} = \nu .$$

Hiernach ist zufolge (8) und wegen $\nu = n - m$

$$(n - m) k''$$

der Mittelwert der Form $\sum a_{ij} \varepsilon_i \varepsilon_j$ *).

Indem man diesen Mittelwert dem wahren, aus der Beobachtung hervorgegangenen Werte $[p\lambda\lambda]$ gleichsetzt, erhält man für das Quadrat des mittleren Fehlers der Gewichtseinheit die Bestimmung

$$k'' = \frac{[p\lambda\lambda]}{n - m} . \tag{11}$$

Dies ist die von Gauss aufgestellte und allgemein angenommene Formel, welche für den Fall gleich genauer Beobachtungen in die einfachere

$$k'' = \frac{[\lambda\lambda]}{n - m} \tag{11*}$$

für das Quadrat des mittleren Fehlers einer Beobachtung übergeht.

138. Einen gewichtigen Einwand gegen diese Formeln hat Bertrand**) erhoben, indem er zeigte, dass man durch Anwendung desselben Prinzips, auf welchem ihre Ableitung beruht und welches darin besteht, dass der durch Beobachtung gefundene Wert einer Funktion der Beobachtungsfehler dem mittleren Wert dieser Funktion gleich gesetzt wird, ganz verschiedene und daher einander widersprechende Bestimmungen des mittleren Fehlers gewinnen kann.

---

*) Der hier befolgte Gedankengang ist, in den wesentlichen Zügen, von Guyou, Compt. rend., CVI, pag. 1282 flg., angegeben worden.

**) Compt. rend., CVI, pag. 1195 flg. u. 1259 flg. — Calc. des Probab. art. 217—221.

Wenn man nämlich statt der Funktion

$$k_1 w_1 + k_2 w_2 + \cdots + k_\nu w_\nu$$

der Widersprüche w_i (s. Gleichung (7), Art. 136), welche Gauss zur Grundlage genommen hat, weil ihr Wert $[p\lambda\lambda]$, d. i. dem Minimum von $[pee]$, gleich ist, eine andere quadratische Form dieser Grössen wählt und ihren mittleren dem beobachteten Wert gleich setzt, so kommt man zu einer neuen Gleichung, welche an sich ebenso plausibel ist wie die Gleichung (11) oder (11*) des vorigen Artikels, welche aber eine andere Bestimmung von k'' liefert, der man durch Wahl der $\frac{\nu(\nu+1)}{2}$ Koeffizienten jener Form jeden beliebigen Wert verleihen kann.

Um diesen Gedanken zur Klarheit zu bringen, sei

$$(1) \qquad \sum a_{ij} w_i w_j \qquad (a_{ij} = a_{ji})$$

die angenommene Form; drückt man mit Hilfe der Gleichungen (2), (3), Art. 136, die w_i durch die ε_i aus und bestimmt den mittleren Wert durch Ausführung von

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\sum a_{ij} w_i w_j \,.\, \varphi_1(\varepsilon_1)\varphi_2(\varepsilon_2)\ldots\varphi_n(\varepsilon_n)\, d\varepsilon_1\, d\varepsilon_2 \ldots d\varepsilon_n,$$

so ergibt sich für denselben, wenn man

$$(2) \qquad \begin{aligned} & a_{11}\left[\frac{AA}{p}\right] + a_{12}\left[\frac{AB}{p}\right] + \cdots + a_{1\nu}\left[\frac{AN}{p}\right] \\ + & a_{21}\left[\frac{BA}{p}\right] + a_{22}\left[\frac{BB}{p}\right] + \cdots + a_{2\nu}\left[\frac{BN}{p}\right] \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ + & a_{\nu 1}\left[\frac{NA}{p}\right] + a_{\nu 2}\left[\frac{NB}{p}\right] + \cdots + a_{\nu\nu}\left[\frac{NN}{p}\right] = G \end{aligned}$$

setzt, die Bestimmung

$$k'' G.$$

Die Vergleichung dieses Wertes mit dem beobachteten (1) führt zu der Bestimmung

$$(3) \qquad k'' = \frac{\Sigma a_{ij} w_i w_j}{G},$$

welche indessen, wie bemerkt, jeden beliebigen Wert vorstellen kann, da man über die Koeffizienten a_{ij} frei verfügen darf.

Unter diesen Bestimmungen verdiente nun diejenige den Vorzug vor den andern, welche die kleinste Unsicherheit befürchten lässt; und diese Unsicherheit wäre, im Sinne der vorliegenden Theorie, nach dem mittleren Werte des Ausdrucks

$$\left(\frac{\Sigma a_{ij} w_i w_j}{G} - k''\right)^2$$

zu beurteilen, welcher Mittelwert das Quadrat des mittleren Fehlers der Bestimmung (3) angibt und von Gauss*) für seine Formel (11*), Art. 137, ausgeführt worden ist. Wenn nun dieser Mittelwert am kleinsten ausfiele, sobald die Formel (3) mit der Gauss'schen Formel zusammenfällt, so wäre die letztere trotz der gegen ihre Ableitung geäusserten Bedenken die beste, welche man wählen kann. Dies aber ist, wie das folgende Beispiel zeigen wird, im Allgemeinen nicht der Fall.

139. Von einem Punkte O seien die vier Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 beobachtet worden; man habe die fünf Horizontalwinkel (P_1P_2), (P_1P_3), (P_1P_4), (P_2P_4) und (P_3P_4) mit gleicher Genauigkeit gemessen und dafür die Werte l_1, l_2, l_3, l_4, l_5 erhalten. Bezeichnet man die drei ersten Winkel der Reihe nach mit x, y, z, so hat man die Fehlergleichungen

$$\begin{aligned}
0 &= -(l_1 + e_1) + x \\
0 &= -(l_2 + e_2) \qquad + y \\
0 &= -(l_3 + e_3) \qquad\qquad + z \\
0 &= -(l_4 + e_4) - x \qquad + z \\
0 &= -(l_5 + e_5) \qquad - y + z,
\end{aligned}$$

welche durch Elimination von x, y, z ergeben

$$\begin{aligned}
e_1 - e_3 + e_4 &= w_1 \\
e_2 - e_3 + e_5 &= w_2,
\end{aligned}$$

worin

$$\begin{aligned}
-l_1 + l_3 - l_4 &= w_1 \\
-l_2 + l_3 - l_5 &= w_2.
\end{aligned}$$

Zur Bestimmung der Korrelaten dienen die Gleichungen

*) Theoria combinat. observat., pars poster., art. 39.

$$3k_1 + k_2 = w_1$$
$$k_1 + 3k_2 = w_2,$$

sie liefern

$$k_1 = \frac{3}{8} w_1 - \frac{1}{8} w_2$$
$$k_2 = -\frac{1}{8} w_1 + \frac{3}{8} w_2.$$

Auf Grund dieser Werte erhält man

$$\lambda_1 = \lambda_4 = \frac{3}{8} w_1 - \frac{1}{8} w_2$$
$$\lambda_2 = \lambda_5 = -\frac{1}{8} w_1 + \frac{3}{8} w_2$$
$$\lambda_3 = -\frac{1}{4} w_1 - \frac{1}{4} w_2;$$

ferner ist

$$[\lambda\lambda] = k_1 w_1 + k_2 w_2 = \frac{3w_1^2 + 3w_2^2 - 2w_1 w_2}{8}$$

und somit nach Formel (11*), Art. 137,

$$k'' = \frac{3w_1^2 + 3w_2^2 - 2w_1 w_2}{16}. \tag{4}$$

Geht man hingegen von der allgemeinen quadratischen Form

$$a_{11} w_1^2 + a_{22} w_2^2 + 2a_{12} w_1 w_2$$

aus, so ergibt sich auf Grund der Gleichungen (2) und (3) des vorigen Artikels

$$k'' = \frac{a_{11} w_1^2 + a_{22} w_2^2 + 2a_{12} w_1 w_2}{3a_{11} + 3a_{22} + 2a_{12}}. \tag{5}$$

Das Quadrat des mittleren Fehlers dieses Ansatzes ist durch den Mittelwert von

$$\left(\frac{a_{11} w_1^2 + a_{22} w_2^2 + 2a_{12} w_1 w_2}{3a_{11} + 3a_{22} + 2a_{12}} - k''\right)^2 \tag{6}$$

ausgedrückt. Da der erste Teil den Mittelwert k'' hat, so hat das doppelte Produkt beider Teile den Durchschnittswert $-2k''^2$; infolge dessen reduziert sich der ganze Mittelwert auf

$$\frac{M(a_{11} w_1^2 + a_{22} w_2^2 + 2a_{12} w_1 w_2)^2}{(3a_{11} + 3a_{22} + 2a_{12})^2} - k''^2.$$

Stellt man w_1 und w_2 durch die Beobachtungsfehler dar, so ergibt sich

$$M(w_1^4) = M(w_2^4) = 18k''^2 + 3k^{\mathrm{IV}}$$

$$M(w_1^2 w_2^2) = 8k''^2 + k^{\mathrm{IV}}$$

$$M(w_1^3 w_2) = M(w_1 w_2^3) = 6k''^2 + k^{\mathrm{IV}},$$

so dass der mittlere Wert des Ausdruckes (6) gleichkommt

$$\frac{(9a_{11}^2 + 9a_{22}^2 + 28a_{12}^2 - 2a_{11}a_{22} + 12a_{11}a_{12} + 12a_{22}a_{12})k''^2 + (3a_{11}^2 + 3a_{22}^2 + 4a_{12}^2 + 2a_{11}a_{22} + 4a_{11}a_{12} + 4a_{22}a_{12})k^{\mathrm{IV}}}{(3a_{11} + 3a_{22} + 2a_{12})^2}$$

Nimmt man an, dass die Fehler dem Gauss'schen Gesetz folgen, so ist $k^{\mathrm{IV}} = 3k''^2$ (s. Art. 52); hiermit vereinfacht sich der Ausdruck zu

$$\frac{18a_{11}^2 + 18a_{22}^2 + 40a_{12}^2 + 4a_{11}a_{22} + 24a_{11}a_{12} + 24a_{22}a_{12}}{(3a_{11} + 3a_{22} + 2a_{12})^2} k''^2. \tag{7}$$

Um nun verschiedene Annahmen über die Form

$$a_{11}w_1^2 + a_{22}w_2^2 + 2a_{12}w_1 w_2$$

auf ihre Resultate zu prüfen, treffen wir die weitere vereinfachende Annahme $w_1 = w_2 = w$ und erhalten:

	Wert von k'' nach Gleich. (5);	Quadrat des mittl. Fehlers dieser Bestimmung nach Gleich. (7).
für 1) $a_{22} = a_{12} = 0,\ a_{11} = 1$	$\frac{1}{3} w^2$	$\frac{2}{9} w^4 = 0{,}222\ w^4$
„ 2) $a_{11} = a_{12} = 0,\ a_{22} = 1$		
„ 3) $a_{11} = a_{22} = 1,\ a_{12} = 0$	$\frac{1}{3} w^2$	$\frac{10}{81} w^4 = 0{,}123\ w^4$
„ 4) $a_{11} = a_{22} = 3,\ a_{12} = -1$	$\frac{1}{4} w^2$	$\frac{1}{16} w^4 = 0{,}062\ w^4$
„ 5) $a_{11} = a_{22} = 1,\ a_{12} = -\frac{1}{2}$,	$\frac{1}{5} w^2$	$\frac{26}{625} w^4 = 0{,}041\ w^4$.

Hieraus geht nun zunächst, die allgemeinen Erörterungen bestätigend, hervor, dass verschiedene Formen zu verschiedenen Bestimmungen von k'' führen; dass ferner diese Bestimmungen nicht den gleichen Grad von Zuverlässigkeit besitzen; dass endlich die Gauss'sche Formel (4), welche der Annahme 4) entspricht, im vorliegenden Falle nicht die beste ist, da sie von der Annahme 5) übertroffen wird. Um die beste Form zu erhalten, hätte man jene Werte von a_{11}, a_{22}, a_{12} aufzusuchen, welche den Ausdruck (7) zu einem Minimum machen.

Für die Gauss'sche Formel spricht indessen trotz dieses Einwurfs ausser ihrer Einfachheit noch der Umstand, dass

sie nach einem für alle Fälle gleich bleibenden Vorgange die Genauigkeit der Beobachtungsreihe schätzt.

140. Die mittleren Fehler in der Bestimmung der unbekannten Elemente setzen sich zusammen aus dem mittleren Fehler einer Beobachtung (eventuell der Gewichtseinheit) und aus den Gewichten der Elemente. Die letzteren hängen von den Beobachtungsresultaten, also auch von den zwischen diesen bestehenden Widersprüchen nicht ab, sind vielmehr durch die Koeffizienten der Fehlergleichungen allein bestimmt. Wenn dagegen der mittlere Fehler einer Beobachtung aus den Widersprüchen abgeleitet wird, so entspricht dies der Voraussetzung, dass diese Widersprüche das einzige Mittel zur Beurteilung der Genauigkeit der Beobachtungen bilden, dass also a priori die Genauigkeit völlig unbekannt sei. Man kann sich aber auch auf den entgegengesetzten Standpunkt stellen und den mittleren Fehler einer Beobachtung als eine Grösse ansehen, welche von vornherein gegeben ist und an der die Beobachtungsergebnisse nichts mehr zu ändern vermögen. Es entsteht dann die bei direkten Beobachtungen bereits aufgeworfene und erledigte Frage, ob nach Anstellung der Beobachtungen die auftauchenden Widersprüche einen Einfluss ausüben können auf das Vertrauen, welches man in die Resultate zu setzen hat.

Für einen einfachen Fall ist diese Untersuchung von Bertrand*) durchgeführt worden unter der Annahme, dass die Fehler dem Gauss'schen Gesetze folgen. Wir geben sie in veränderter Form wieder.

Die drei Winkel eines ebenen Dreiecks sind unabhängig von einander und mit gleicher Genauigkeit gemessen worden; die Messungen ergaben für sie die Werte l_1, l_2, l_3. Werden die Fehler mit ε_1, ε_2, ε_3 bezeichnet, so besteht die Gleichung

$$(1) \qquad \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_2 = w,$$

wo $w = -(l_1 + l_2 + l_3) + 180^0$ den Widerspruch zwischen der beobachteten und der theoretischen Winkelsumme bezeichnet. Die Beurteilung der Genauigkeit der Beobachtungen geschieht nach dem Mittelwerte von

*) Compt. rend., CVI, pag. 967 flg.

(2) $$\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 = \varrho^2.$$

Um diesen Mittelwert bestimmen zu können, handelt es sich um die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem beobachteten, also gegebenen w die Grösse ϱ^2 zwischen den Grenzen ϱ^2 und $\varrho^2 + d(\varrho^2)$ enthalten sei.

Nach Gleichung (3), Art. 61, ergibt sich, indem man $u = \varrho^2$ setzt, die Wahrscheinlichkeit, dass

$$\varrho^2 \leqq \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 \leqq \varrho^2 + d(\varrho^2),$$

gleich

$$\frac{4h^3}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varrho^2} \varrho^2 d\varrho,$$

welcher Wert aufgefasst werden kann als das Produkt aus $\frac{h^3}{\pi\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varrho^2}$ mit dem Volumen $4\pi\varrho^2 d\varrho$ einer Kugelschale, die begrenzt wird von der Kugel (2) — $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ als rechtwinklige Koordinaten eines Punktes im Raume angesehen — und einer mit ihr konzentrischen Kugel vom Radius $\varrho + d\varrho$. Dementsprechend würde sich die Wahrscheinlichkeit, dass gleichzeitig

$$\varrho^2 \leqq \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 \leqq \varrho^2 + d(\varrho^2) \quad \text{und} \quad w \leqq \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \leqq w + dw$$

ist, darstellen als Produkt aus $\frac{h^3}{\pi\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varrho^2}$ und dem Volumen jenes Anteils der Kugelschale, welcher zwischen der Ebene (1) und der dazu parallelen Ebene $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = w + dw$, im Abstande $\frac{dw}{\sqrt{3}}$ von der ersten, enthalten ist, d. i. $\frac{2\pi\varrho\, dw\, d\varrho}{\sqrt{3}}$, wäre also gleich

$$\frac{2h^3}{\sqrt{3\pi}} e^{-h^2\varrho^2} \varrho\, d\varrho\, dw,$$

wenn bei gegebenem w die Grösse ϱ aller Werte fähig wäre. Da aber ϱ nur solche Werte annehmen kann, welche $\frac{w}{\sqrt{3}}$, nämlich den senkrechten Abstand der Ebene (1) vom Mittelpunkt der Kugel (2) überschreiten, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei gegebenem w die Summe der Fehlerquadrate zwischen ϱ^2 und $\varrho^2 + d(\varrho^2)$ liege,

$$(3)\qquad \frac{\frac{2h^3}{\sqrt{3\pi}}\, e^{-h^2\varrho^2}\varrho\, d\varrho\, dw}{\frac{2h^3}{\sqrt{3\pi}}\, dw \int\limits_{\frac{w}{\sqrt{3}}}^{\infty} e^{-h^2\varrho^2}\varrho\, d\varrho} = 2h^2 e^{\frac{h^2w^2}{3} - h^2\varrho^2}\varrho\, d\varrho .$$

Hiernach ist der mittlere Wert von $\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2$ gleich

$$(4)\qquad 2h^2 e^{\frac{h^2w^2}{3}} \int\limits_{\frac{w}{\sqrt{3}}}^{\infty} e^{-h^2\varrho^2}\varrho^3 d\varrho = \frac{w^2}{3} + \frac{1}{h^2}.$$

Die Anwendung der in Artikel 136 entwickelten Theorie auf den vorliegenden Fall lehrt aber, dass man, um den Widerspruch zu beseitigen, jedes der drei Messungsergebnisse um $\frac{w}{3}$ zu vermehren habe; dann sind die den ausgeglichenen Messungen noch anhaftenden Fehler

$$\varepsilon_1 - \frac{w}{3}, \qquad \varepsilon_2 - \frac{w}{3}, \qquad \varepsilon_3 - \frac{w}{3},$$

ihre Quadratsumme vermöge der Gleichungen (1) und (2)

$$\varrho^2 - \frac{w^2}{3},$$

und der Mittelwert dieser Quadratsumme, wenn man den soeben für ϱ^2 gefundenen Mittelwert (4) einsetzt,

$$\frac{1}{h^2}.$$

Dies ist aber auch derjenige Wert, welcher sich a priori, d. h. vor Ausführung der Beobachtungen und unter Zugrundelegung der bekannten Präzision ergibt. Die durch die Ausgleichung gefundenen Winkelwerte sind nämlich

$$l_1 + \frac{1}{3}(180^0 - l_1 - l_2 - l_3)$$

$$l_2 + \frac{1}{3}(180^0 - l_1 - l_2 - l_3)$$

$$l_3 + \frac{1}{3}(180^0 - l_1 - l_2 - l_3)$$

und die ihnen anhaftenden Fehler

$$\frac{1}{3}(\ 2\varepsilon_1 - \ \varepsilon_2 - \ \varepsilon_3)$$

$$\frac{1}{3}(-\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 - \ \varepsilon_3)$$

$$\frac{1}{3}(-\varepsilon_1 - \ \varepsilon_2 + 2\varepsilon_3);$$

die Summe der Quadrate dieser Fehler ist

$$\frac{2}{3}(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2) + \Sigma,$$

wo Σ ein Aggregat von Produkten je zweier Fehler vertritt. Der Mittelwert dieses Ausdrucks reduziert sich auf den Mittelwert des ersten Teils und ist in der That

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2h^2} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{h^2}$$

wie vorhin.

Wenn also die Genauigkeit im vorhinein so sicher bekannt ist, dass das Ergebnis einiger weiteren Beobachtungen zur Änderung ihres Wertes keine Veranlassung zu geben vermag, so ist der mittlere Fehler einer Winkelmessung unabhängig von der Grösse des Widerspruchs w.

§ 8. Darstellung der Werte der Unbekannten, ihrer Gewichte und mittleren Fehler mittels der Determinanten.

141. Die vollständige Lösung der Aufgabe, aus n linearen Gleichungen, welche die aus der Beobachtung hervorgegangenen Grössen mit den m unbekannten Elementen verbinden, erfordert die Bestimmung der letzteren, die Berechnung ihrer Gewichte und des mittleren Fehlers einer Beobachtung (eventuell der Gewichtseinheit), woraus sich dann die mittleren Fehler der Elemente ergeben. Mit der Durchführung dieser Rechnungen mittels des von Gauss eingeführten Algorithmus werden wir uns nicht beschäftigen; dagegen soll die explicite Darstellung der genannten Grössen mit Hilfe der Determinanten vorgeführt werden, weil sie zur Erörterung mancher wichtigen Frage Anlass gibt.

Eine der ersten hierher gehörigen Arbeiten rührt von

van Geer*) her; Glaisher**) hat die Anwendung der Determinanten in diesem Zweige der Mathematik in wesentlichen Punkten weiter geführt***).

142. Aus dem System der n Fehlergleichungen

$$(1) \qquad \varepsilon_i = -l_i + a_i x + b_i y + c_i z + \cdots + f_i t \quad (i = 1, 2, \cdots n)$$

ergeben sich zur Bestimmung der vorteilhaftesten Werte der m ($< n$) unbekannten Elemente die m Gleichungen

$$(2) \qquad \begin{array}{c} [aa]x + [ab]y + \cdots + [af]t = [al] \\ [ba]x + [bb]y + \cdots + [bf]t = [bl] \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ [fa]x + [fb]y + \cdots + [ff]t = [fl]; \end{array}$$

dabei ist vorausgesetzt, dass die Gleichungen (1), beziehungsweise die zugehörigen Beobachtungen von gleicher Genauigkeit oder, falls dies nicht zutreffen sollte, durch Multiplikation mit den Quadratwurzeln ihrer respektiven Gewichte auf gleiche Genauigkeit reduziert worden sind (s. Art. 104).

Aus den Gleichungen 2) ergibt sich unmittelbar

$$(3) \quad x = \frac{\begin{vmatrix} [al][ab]\cdots[af] \\ [bl][bb]\cdots[bf] \\ \cdots\cdots\cdots \\ [fl][fb]\cdots[ff] \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} [aa][ab]\cdots[af] \\ [ba][bb]\cdots[bf] \\ \cdots\cdots\cdots \\ [fa][fb]\cdots[ff] \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} [aa][al]\cdots[af] \\ [ba][bl]\cdots[bf] \\ \cdots\cdots\cdots \\ [fa][fl]\cdots[ff] \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} [aa][ab]\cdots[af] \\ [ba][bb]\cdots[bf] \\ \cdots\cdots\cdots \\ [fa][fb]\cdots[ff] \end{vmatrix}}, \cdots$$

143. Zur Ermittlung des Gewichtes von x dient ein Gleichungssystem, welches dem System (2) analog ist mit dem Unterschiede, dass die rechten Seiten mit $1, 0, \ldots 0$ be-

---

*) Nieuwe archief voor wiskunde, Deel XII u. XVIII. In letzterer Abhandlung wird auf die Arbeiten Glaisher's Bezug genommen.

**) Monthly Notices of the R. Astron. Soc., XXXIV, pag. 311; XL, pag. 600; XLI, pag. 18 flg.

***) Andeutungen über die Anwendung der Determinanten in der Methode der kleinsten Quadrate finden sich schon 1841 bei Jacobi: De formatione et proprietatibus Determinantium, Crelle J., 22, pag. 285 flg.

setzt sind; die an die Stelle von x in diesem so veränderten Gleichungssystem tretende Unbekannte ist das reciproke Gewicht von x; ähnliches gilt bezüglich der Gewichte der übrigen Elemente. Hiernach ist

$$(4)\quad p_x = \frac{\begin{vmatrix} [aa][ab]\cdots[af] \\ [ba][bb]\cdots[bf] \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ [fa][fb]\cdots[ff] \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} [bb][bc]\cdots[bf] \\ [cb][cc]\cdots[cf] \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ [fb][fc]\cdots[ff] \end{vmatrix}}, \quad p_y = \frac{\begin{vmatrix} [aa][ab]\cdots[af] \\ [ba][bb]\cdots[bf] \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ [fa][fb]\cdots[ff] \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} [aa][ac]\cdots[af] \\ [ca][cc]\cdots[cf] \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ [fa][fc]\cdots[ff] \end{vmatrix}}, \cdots.$$

Man bemerkt, dass die Nenner dieser Ausdrücke die den Elementen der Diagonale adjungirten Subdeterminanten der Determinante des Gleichungssystems (2) sind, welche als gemeinsamer Nenner in (3) und als gemeinsamer Zähler in (4) auftritt.

144. Zur Bestimmung des mittleren Fehlers einer Beobachtung ist die Summe $[\lambda\lambda]$ erforderlich. Nun ist

$$\begin{aligned}
[\lambda\lambda] &= [(-l + ax + by + \cdots + ft)^2] \\
&= [ll] + x([aa]x + [ab]y + \cdots + [af]t - [al]) \\
&\qquad + y([ba]x + [bb]y + \cdots + [bf]t - [bl]) \\
&\qquad \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
&\qquad + t([fa]x + [fb]y + \cdots + [ff]t - [fl]) \\
&\qquad\quad - [al]x - [bl]y - \cdots - [fl]t,
\end{aligned}$$

also vermöge (2)

$$(5)\qquad [\lambda\lambda] = -[al]x - [bl]y - \cdots - [fl]t + [ll].$$

Bezeichnet man der Kürze wegen die Determinante

$$\begin{vmatrix} [aa][ab]\cdots[af] \\ [ba][bb]\cdots[bf] \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ [fa][fb]\cdots[ff] \end{vmatrix}$$

mit R und trägt in (5) die Werte für $x, y, \ldots$ aus (3) ein, so wird

$$R[\lambda\lambda] = (-1)^m \left\{ [al] \begin{vmatrix} [ab][ac]\cdots[af][al] \\ [bb][bc]\cdots[bf][bl] \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ [fb][fc]\cdots[ff][fl] \end{vmatrix} \right.$$

$$- [bl] \begin{vmatrix} [aa][ac]\cdots[af][al] \\ [ba][bc]\cdots[bf][bl] \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ [fa][fc]\cdots[ff][fl] \end{vmatrix}$$

$$\left. + \cdots + (-1)^m [ll] \begin{vmatrix} [aa][ab]\cdots[af] \\ [ba][bb]\cdots[bf] \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ [fa][fb]\cdots[ff] \end{vmatrix} \right\},$$

wenn man nämlich die Kolonne $[al]$, $[bl]$, ... $[fl]$ in allen Determinanten durch Kolonnenvertauschung an letzte Stelle bringt. Der eingeklammerte Ausdruck ist aber die Determinante $(m+1)^{\text{ten}}$ Grades

$$\begin{vmatrix} [la][lb]\cdots[lf][ll] \\ [aa][ab]\cdots[af][al] \\ [ba][bb]\cdots[bf][bl] \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ [fa][fb]\cdots[ff][fl] \end{vmatrix};$$

macht man hier die erste Zeile zur letzten, so kommt

$$[\lambda\lambda] = \frac{1}{R} \begin{vmatrix} [aa][ab]\cdots[af][al] \\ [ba][bb]\cdots[bf][bl] \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ [fa][fb]\cdots[ff][fl] \\ [la][lb]\cdots[lf][ll] \end{vmatrix}.$$

Die neue Determinante rechter Hand, welche aus R hervorgeht durch Hinzufügung des Randes

$$\begin{matrix} & [al] \\ & [bl] \\ & \vdots \\ & [fl] \\ [la][lb]\cdots[lf] & [ll] \end{matrix}$$

möge in der Folge mit L bezeichnet werden.

Man kann die Subdeterminante von R, welche dem Element $[ij]$ adjungiert ist, zweckmässig mit A_{ij} bezeichnen, wobei ebenso wie $[ij] = [ji]$ auch $A_{ij} = A_{ji}$ ist. Dann lassen sich auf Grund der Bemerkung, welche zu den Gleichungen (4) gemacht worden ist, die Quadrate der mittleren Fehler der Elemente wie folgt darstellen:

$$(7) \qquad k_x'' = \frac{A_{aa} L}{(n-m) R^2}, \qquad k_y'' = \frac{A_{bb} L}{(n-m) R^2} \quad \cdots.$$

Der Zähler eines jeden dieser Ausdrücke ist das Produkt aus einer Determinante des $(m-1)^{\text{ten}}$ mit einer solchen des $(m+1)^{\text{ten}}$ Grades, der Nenner enthält das Quadrat einer Determinante m^{ten} Grades.

145. Man kann die Gewichte der Elemente noch auf einem andern Wege erhalten, indem man die Elemente selbst als lineare Formen der Beobachtungen, also in der Gestalt

$$x = [\alpha l], \quad y = [\beta l], \quad \ldots$$

darstellt. Man gewinnt dadurch auch die Multiplikatoren, welche die Methode der kleinsten Quadrate vorschreibt.

Die Determinante, welche den Zähler von x in (3) bildet, kann nach den Elementen der ersten Kolonne aufgelöst werden wie folgt:

$$l_1 \begin{vmatrix} a_1 [ab] \cdots [af] \\ b_1 [bb] \cdots [bf] \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ f_1 [fb] \cdots [ff] \end{vmatrix} + l_2 \begin{vmatrix} a_2 [ab] \cdots [af] \\ b_2 [bb] \cdots [bf] \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ f_2 [fb] \cdots [ff] \end{vmatrix}$$
$$+ \cdots + l_n \begin{vmatrix} a_n [ab] \cdots [af] \\ b_n [bb] \cdots [bf] \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ f_n [fb] \cdots [ff] \end{vmatrix};$$

entwickelt man die einzelnen Determinanten nach den Elementen der ersten Kolonne, so wird, mit bereits erläuterten Bezeichnungen,

$$\begin{aligned} R_x = {} & l_1 (a_1 A_{aa} + b_1 A_{ba} + \cdots + f_1 A_{fa}) \\ & + l_2 (a_2 A_{aa} + b_2 A_{ba} + \cdots + f_2 A_{fa}) \\ & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ & + l_n (a_n A_{aa} + b_n A_{ba} + \cdots + f_n A_{fa}). \end{aligned}$$

Hiernach ist

$$(8)\quad \begin{aligned} R\alpha_i &= a_i A_{aa} + b_i A_{ba} + \cdots + f_i A_{fa} \\ \text{ebenso}\quad R\beta_i &= a_i A_{ab} + b_i A_{bb} + \cdots + f_i A_{fb} \text{ u. s. w.} \end{aligned}$$

Daraus aber ergibt sich

$$\begin{aligned} R^2[\alpha\alpha] = & A_{aa}([aa]A_{aa} + [ab]A_{ab} + \cdots + [af]A_{af}) \\ & + A_{ba}([ba]A_{aa} + [bb]A_{ab} + \cdots + [bf]A_{af}) \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + A_{fa}([fa]A_{aa} + [fb]A_{ab} + \cdots + [ff]A_{af}) \end{aligned}$$

und nach dem Satze über die Komposition der Reihen einer Determinante mit den Subdeterminanten zu den Elementen paralleler Reihen sowie mit Beachtung von Art. 127

$$[\alpha\alpha] = \frac{1}{p_x} = \frac{A_{aa}}{R}$$

wie oben.

146. Die Determinanten R und L sind in Summen von Quadraten auflösbar. Dasselbe gilt von den Unterdeterminanten $A_{aa}, A_{bb}, \ldots$ von R, weil sie denselben Bau aufweisen wie R und L. Daraus folgt, was hier gleich bemerkt werden mag, dass die Ausdrücke für $p_x, p_y, \ldots$ sowie für $k_x'', k_y'', \ldots$ notwendig positiv sind.

Schreibt man, um die obige Behauptung zu erweisen, die Elemente in R aus, so wird

$$R = \left| \begin{array}{l} a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2,\quad a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n, \cdots \\ \qquad\qquad \cdots a_1f_1 + a_2f_2 + \cdots + a_nf_n \\ b_1a_1 + b_2a_2 + \cdots + b_na_n,\quad b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2, \cdots \\ \qquad\qquad \cdots b_1f_1 + b_2f_2 + \cdots + b_nf_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_1a_1 + f_2a_2 + \cdots + f_na_n,\quad f_1b_1 + f_2b_2 + \cdots + f_nb_n, \cdots \\ \qquad\qquad \cdots f_1^2 + f_2^2 + \cdots + f_n^2 \end{array} \right|;$$

durch Kombination einzelner Gliederkolonnen kann R in n^m Determinanten m^{ten} Grades mit einfachen Elementen aufgelöst werden; von diesen aber verschwinden alle diejenigen, zu deren Bildung zwei oder mehrere korrespondierende Gliederkolonnen verwendet worden sind. Es bleiben daher blos $n(n-1)\cdots(n-m+1)$ Determinanten übrig, welche

sich aus den möglichen Zusammenstellungen ungleich situierter Gliederkolonnen aufbauen lassen, entsprechend der Anzahl der Variationen ohne Wiederholung von n Elementen in der m^{ten} Klasse. Von diesen Determinanten sind $m!$ enthalten in der Determinante

$$\begin{vmatrix} a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_m^2, & a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_m b_m, & \ldots \\ & \ldots a_1 f_1 + a_2 f_2 + \cdots + a_m f_m & \\ b_1 a_1 + b_2 a_2 + \cdots + b_m a_m, & b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_m^2, & \ldots \\ & \ldots b_1 f_1 + b_2 f_2 + \cdots + b_m f_m & \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ f_1 a_1 + f_2 a_2 + \cdots + f_m a_m, & f_1 b_1 + f_2 b_2 + \cdots + f_m b_m, & \ldots \\ & \ldots f_1^2 + f_2^2 + \cdots + f_m^2 & \end{vmatrix},$$

welche nach dem Multiplikationstheorem gleichkommt

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \ldots & f_1 \\ a_2 & b_2 & \ldots & f_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_m & b_m & \ldots & f_m \end{vmatrix}^2 = (a_1 b_2 \cdots f_m)^2;$$

da aber aus den n Zeigern $1, 2, \ldots n$ sich $\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{1.2\ldots m}$ Kombinationen zu je m bilden lassen, so sind alle $n(n-1)\ldots(n-m+1)$ oben erwähnten Determinanten in

$$\sum (a_1 b_2 \ldots f_m)^2$$

enthalten, wenn man die Summierung über die $\binom{n}{m}$ möglichen Zeigerkombinationen ausdehnt, und es ist daher thatsächlich

$$R = \sum (a_1 b_2 \ldots f_m)^2 \tag{9}$$

eine Quadratsumme.

Ebenso ergibt sich für L, welches mit R übereinstimmenden Bau zeigt, die Darstellung

$$L = \sum (a_1 b_2 \ldots f_m l_{m+1})^2 \tag{10}$$

und die Summe besteht hier aus $\binom{n}{m+1}$ Gliedern.

Jede der Determinanten, welche die Zähler von $x, y, \ldots$ in (3) bilden, kann in eine Summe von Produkten aus

Determinanten mit einfachen Elementen aufgelöst werden. So ist der Zähler von x, vollständig ausgeschrieben,

$$\begin{vmatrix} a_1 l_1 + a_2 l_2 + \cdots + a_n l_n, & a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n, \cdots \\ & \cdots a_1 f_1 + a_2 f_2 + \cdots + a_n f_n \\ b_1 l_1 + b_2 l_2 + \cdots + b_n l_n, & b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2, \cdots \\ & \cdots b_1 f_1 + b_2 f_2 + \cdots + b_n f_n, \\ \cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot & \cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \\ f_1 l_1 + f_2 l_2 + \cdots + f_n l_n, & f_1 b_1 + f_2 b_2 + \cdots + f_n b_n, \cdots \\ & \cdots f_1^2 + f_2^2 + \cdots + f_n^2 \end{vmatrix};$$

mittels der nämlichen Betrachtung kann gezeigt werden, dass er in $\binom{n}{m}$ Determinanten zerlegbar ist, deren eine

$$\begin{vmatrix} a_1 l_1 + a_2 l_2 + \cdots + a_m l_m, & a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_m b_m, \cdots \\ & \cdots a_1 f_1 + a_2 f_2 + \cdots + a_m f_m \\ b_1 l_1 + b_2 l_2 + \cdots + b_m l_m, & b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_m^2, \cdots \\ & \cdots b_1 f_1 + b_2 f_2 + \cdots + b_m f_m \\ \cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot & \cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \\ f_1 l_1 + f_2 l_2 + \cdots + f_m l_m, & f_1 b_1 + f_2 b_2 + \cdots + f_m b_m, \cdots \\ & \cdots f_1^2 + f_2^2 + \cdots + f_m^2 \end{vmatrix}$$

lautet und nach dem Multiplikationstheorem durch das Produkt

$$(a_1 b_2 \dots f_m)(l_1 b_2 \dots f_m)$$

zu ersetzen ist. Hiernach ist jener Zähler

$$(11)\qquad \begin{vmatrix} [al][ab] \dots [af] \\ [bl][bb] \dots [bf] \\ \cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \\ [fl][fb] \dots [ff] \end{vmatrix} = \sum (a_1 b_2 \dots f_m)(l_1 b_2 \dots f_m),$$

die Summierung auf alle Kombinationen der Zeiger $1, 2, \dots n$ zur m^{ten} Klasse ausgedehnt.

147. Auf Grund dieser Ergebnisse können nun die Werte der Elemente auf die Form

$$(12)\quad x = \frac{\sum (a_1 b_2 \dots f_m)(l_1 b_2 \dots f_m)}{\sum (a_1 b_2 \dots f_m)^2}, \quad y = \frac{\sum (a_1 b_2 \dots f_m)(a_1 l_2 \dots f_m)}{\sum (a_1 b_2 \dots f_m)^2}, \dots$$

gebracht werden.

Denkt man sich aber aus den n Fehlergleichungen (1), Art. 142, nachdem man ihre linken Seiten durchweg gleich Null gesetzt, die $\binom{n}{m} = \sigma$ möglichen Gruppen von je m Gleichungen gebildet und löst jede dieser Gruppen nach den Elementen auf, so gibt die erste Gruppe die Werte

$$x_1 = \frac{(l_1 b_2 \ldots f_m)}{(a_1 b_2 \ldots f_m)} = \frac{A_1}{P_1}, \qquad y_1 = \frac{(a_1 l_2 \ldots f_m)}{(a_1 b_2 \ldots f_m)} = \frac{B_1}{P_1}, \cdots$$

und die weiteren Gruppen die Werte

$$x_2 = \frac{A_2}{P_2}, \qquad y_2 = \frac{B_2}{P_2}, \cdots$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$x_\sigma = \frac{A_\sigma}{P_\sigma}, \qquad y_\sigma = \frac{B_\sigma}{P_\sigma}, \cdots$$

welche sich von den ersten blos in den Zeigerkombinationen unterscheiden.

Mit Hilfe dieser partiellen Lösungen lassen sich die endgiltigen (12) in der Form

$$(13) \qquad \begin{aligned} x &= \frac{P_1^2 x_1 + P_2^2 x_2 + \cdots + P_\sigma^2 x_\sigma}{P_1^2 + P_2^2 + \cdots + P_\sigma^2}, \\ y &= \frac{P_1^2 y_1 + P_2^2 y_2 + \cdots + P_\sigma^2 y_\sigma}{P_1^2 + P_2^2 + \cdots + P_\sigma^2}, \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{aligned}$$

anschreiben und dieser bemerkenswerte Zusammenhang kann wie folgt ausgesprochen werden*): Greift man aus dem System (1), Art. 142, der Fehlergleichungen, nachdem man ihre linken Seiten annulliert hat, eine Gruppe von m Gleichungen heraus und löst sie auf, so ist dadurch ein Punkt in dem Gebiete der m Grössen $x, y, \ldots t$ bestimmt, welchem als Masse (oder Gewicht) das Quadrat des gemeinsamen Nenners dieser Lösung zugeschrieben werden möge. Wiederholt man dieses Verfahren mit allen übrigen der σ möglichen Gruppen von je m Gleichungen und bestimmt sodann

*) Van Geer, welcher diesen Satz in ähnlicher Weise und zuerst formuliert hat, nachdem er von Glaisher analytisch begründet worden war, bemerkt, dass derselbe sich schon bei Jacobi vorfindet; er ist l. c.) in der Propositio II des Art. 15, pag. 316 ausgesprochen.

die Koordinaten des Schwerpunktes der so gefundenen σ Punkte mit Rücksicht auf die ihnen zugeschriebenen Massen, so fallen diese Koordinaten mit den Resultaten zusammen, welche die Methode der kleinsten Quadrate liefert.

Nicht jede der partiellen Lösungen trägt also zur Bildung des Endresultates in gleichem Maasse bei, sondern jede im geraden Verhältnis des Quadrates ihres Nenners.

Die Methode der kleinsten Quadrate führt in dieser Auffassung die Lösung von σ Systemen von je m Gleichungen auf die Lösung eines einzigen solchen Systems zurück.

148. Die eben ausgeführten Untersuchungen geben einen klaren Einblick in die Bedingungen, unter welchen das System der Gleichungen (2), Art. 142, oder das ursprüngliche System der Fehlergleichungen einer Lösung fähig ist*). Die notwendige und hinreichende Bedingung hiefür ist das Nichtverschwinden der Determinante R, welche als Nenner bei $x, y, \ldots t$ auftritt. Nun kann aber

$$R = P_1^2 + P_2^2 + \cdots + P_\sigma^2$$

nur verschwinden, indem $P_1 = P_2 = \cdots = P_\sigma = 0$ wird. Ist nur eines der P von Null verschieden, so gilt dies auch für R. Es sind aber $P_1, P_2, \ldots P_\sigma$ die Nenner der partiellen Lösungen, von welchen im vorigen Artikel die Rede war. Man kommt also zu dem Schlusse: Wenn sich dem System der Fehlergleichungen wenigstens eine Gruppe von m Gleichungen entnehmen lässt, welche zu einer Bestimmung der Elemente führen, dann und nur dann gibt auch das System der Normalgleichungen eine bestimmte Lösung.

149. Weitere Schlüsse nach dieser Richtung ergeben sich aus einer bemerkenswerten Darstellung, welche Glaisher den Quadraten der mittleren Fehler der Elemente gegeben hat. Den Gleichungen (7), Art. 144, zufolge ist

$$k_x'' = \frac{A_{aa} L}{(n-m) R^2};$$

darin ist

*) Vgl. Gauss, Theoria mot. c. c., art. 180; Theoria combin. observ., art. 23 und Suppl. theor. combin., art. 14.

$$A_{aa} = \begin{vmatrix} [bb][bc]\ldots[bf] \\ [cb][cc]\ldots[cf] \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ [fb][fc]\ldots[ff] \end{vmatrix}, \qquad R = \begin{vmatrix} [aa][ab]\ldots[af] \\ [ba][bb]\ldots[bf] \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ [fa][fb]\ldots[ff] \end{vmatrix},$$

$$L = \begin{vmatrix} [aa][ab]\ldots[af][al] \\ [ba][bb]\ldots[bf][bl] \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ [fa][fb]\ldots[ff][fl] \\ [la][lb]\ldots[lf][ll] \end{vmatrix};$$

bezeichnet man die dem Element $[ij]$ adjungierte Subdeterminante von L mit α_{ij}, so ist*)

$$\alpha_{aa}\alpha_{ll} - \alpha_{al}\alpha_{la} = A_{aa} L$$

und da $\alpha_{ll} = R$ und $\alpha_{al} = \alpha_{la}$, so wird

$$(n - m)k_x'' = \frac{\alpha_{aa}}{R} - \left(\frac{\alpha_{la}}{R}\right)^2.$$

Es ist aber $\frac{\alpha_{la}}{R} = x$ (vgl. die Gleichungen (3), Art. 142), ferner

$$\frac{\alpha_{aa}}{R} = \frac{\begin{vmatrix} [bb]\ldots[bf][bl] \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ [fb]\ldots[ff][fl] \\ [lb]\ldots[lf][ll] \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} [aa][ab]\ldots[af] \\ [ba][bb]\ldots[bf] \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ [fa][fb]\ldots[ff] \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} [al][ab]\ldots[af] \\ [bl][bb]\ldots[bf] \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ [fl][fb]\ldots[ff] \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} [aa][ab]\ldots[af] \\ [ba][bb]\ldots[bf] \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ [fa][fb]\ldots[ff] \end{vmatrix}} \cdot \frac{\begin{vmatrix} [ll][lb]\ldots[lf] \\ [bl][bb]\ldots[bf] \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ [fl][fb]\ldots[ff] \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} [la][lb]\ldots[lf] \\ [ba][bb]\ldots[bf] \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ [fa][fb]\ldots[ff] \end{vmatrix}} = x\xi,$$

wobei ξ derjenige Wert ist, welcher aus dem Gleichungssystem

*) Baltzer, Det., pag. 63.

$$
(14) \qquad
\begin{array}{l}
[la]\xi + [lb]\eta + \cdots + [lf]\tau = [ll] \\
[ba]\xi + [bb]\eta + \cdots + [bf]\tau = [bl] \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
[fa]\xi + [fb]\eta + \cdots + [ff]\tau = [fl]
\end{array}
$$

hervorgeht, das sich von dem System (2), Art. 142, der Normalgleichungen nur dadurch unterscheidet, dass an die Stelle der ersten Gleichung die Gleichung

$$[la]\xi + [lb]\eta + \cdots + [lf]\tau = [ll]$$

getreten ist. Mithin hat man

$$(15) \qquad k_x'' = \frac{x(\xi - x)}{n - m}, \qquad k_y'' = \frac{y(\eta - y)}{n - m}, \quad \ldots$$

wenn $\eta, \ldots$ aus einem Gleichungssystem bestimmt wird, das aus (2) hervorgeht, indem man die zweite, ... Gleichung dieses Systems durch $[la]\xi + [lb]\eta + \cdots + [lf]\tau = [ll]$ ersetzt.

Es möchte nun scheinen, als ob $k_x'', k_y'', \ldots$ mit $x, y, \ldots$ beziehungsweise zugleich verschwände; da jedoch, wie aus dem obigen hervorgeht, mit dem Zähler von x gleichzeitig der Nenner von ξ Null wird etc., so wird, indem x verschwindet, ξ unendlich gross.

Es bleibt aber noch der Fall zu untersuchen, dass $\xi = x$ oder $\eta = y, \cdots$ ist. Da die Gleichung (5), Art. 144, eine Folge der Gleichungen (2), Art. 142, ist, so kann eine von den letzteren durch jene ersetzt werden, und man kann insbesondere auch für (2) das Gleichungssystem

$$
\begin{array}{l}
[la]x + [lb]y + \cdots + [lf]t = [ll] - [\lambda\lambda] \\
[ba]x + [bb]y + \cdots + [bf]t = [bl] \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
[fa]x + [fb]y + \cdots + [ff]t = [fl]
\end{array}
$$

nehmen. Dies gibt für x die Auflösung

$$x = \frac{\begin{vmatrix} [ll]-[\lambda\lambda] & [lb] \ldots [lf] \\ [bl] & [bb] \ldots [bf] \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ [fl] & [fb] \ldots [ff] \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} [la] & [lb] \ldots [lf] \\ [ba] & [bb] \ldots [bf] \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ [fa] & [fb] \ldots [ff] \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} [ll][lb] \ldots [lf] \\ [bl][bb] \ldots [bf] \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ [fl][fb] \ldots [ff] \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} [la][lb] \ldots [lf] \\ [ba][bb] \ldots [bf] \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ [fa][fb] \ldots [ff] \end{vmatrix}} - [\lambda\lambda] \frac{\begin{vmatrix} [bb][bc] \ldots [bf] \\ \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ [fb][fc] \ldots [ff] \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} [la][lb] \ldots [lf] \\ [ba][bb] \ldots [bf] \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ [fa][fb] \ldots [ff] \end{vmatrix}};$$

der erste Teil der rechten Seite stellt aber ξ vor, demnach wird $\xi = x$, wenn

$$[\lambda\lambda] \begin{vmatrix} [bb][bc] \ldots bf] \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ [fb][fc] \ldots [ff] \end{vmatrix} = 0.$$

Wenn also, während $\xi = x$, der zweite Faktor der linken Seite der letztangeschriebenen Gleichung von Null verschieden ist, so ist notwendig $[\lambda\lambda] = 0$ und demzufolge nicht allein $k_x'' = 0$, sondern auch $k_y'' = 0, \cdots$, daher auch $\eta = y, \cdots$. Dies Resultat stimmt mit der einfachen Überlegung überein; denn $[\lambda\lambda] = 0$ sagt aus, dass alle Fehlergleichungen, nachdem man ihre linken Seiten durch Null ersetzt hat, durch ein und dasselbe Wertsystem $x, y, \ldots t$ befriedigt werden können.

Ist hingegen der zweite Faktor der linken Seite der letzten Gleichung gleich Null, so ist wegen

$$\begin{vmatrix} [bb][bc] \ldots [bf] \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ [fb][fc] \ldots [ff] \end{vmatrix} = \sum (b_1 c_2 \ldots f_{m-1})^2$$

auch $(b_1 c_2 \cdots f_{m-1}) = 0$ für jede Kombination der $m-1$ Zeiger, folglich auch

$$R = \sum (a_1 b_2 c_3 \cdots f_m)^2 = 0.$$

Wenn aber $(b_1 c_2 \cdots f_{m-1}) = 0$ ist für alle Zeigerkombinationen,

dann sind die Fehlergleichungen (1), Art. 142, nicht unabhängig von einander, d. h. es lässt sich aus ihnen keine Gruppe von m Gleichungen herausheben, welche $x, y, \ldots t$ bestimmen würden. Diese Thatsache drückt sich auch in dem bemerkten Verschwinden von R aus, das zur Folge hat, dass $x, y, \ldots; \; p_x, p_y, \ldots; \; k_x'', k_y'', \ldots$ in der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ erscheinen.

Das Ergebnis dieser Untersuchung zusammenfassend kann man also sagen, dass in der Regel eine der Gleichungen

$$\xi = x, \quad \eta = y, \cdots$$

alle übrigen zur Folge hat, und dass im Ausnahmefalle eine solche Gleichung die Unbestimmtheit der ganzen Aufgabe anzeigt.

§ 9. Beurteilung der Genauigkeit einer Funktion direkt beobachteter oder aus Beobachtungen abgeleiteter Grössen.

150. Wenn man an dem Prinzip festhält, welches dem zweiten Gauss'schen Beweise zu Grunde liegt, so bietet es keine Schwierigkeit, den mittleren Fehler oder das Gewicht in der Bestimmung einer Funktion direkt beobachteter oder aus Beobachtungen abgeleiteter Grössen zu berechnen. Wir beginnen mit der einfachsten Aufgabe dieser Art, auf welche die anderen sich zurückführen lassen.

Für die von einander unabhängigen Grössen $L_1, L_2, L_3, \ldots$ seien durch direkte Beobachtung die Werte $l_1, l_2, l_3, \ldots$ erhalten worden; die Fehler dieser Bestimmungen seien $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$, die Quadrate der mittleren Fehler $k_1'', k_2'', k_3'', \ldots$, die Gewichte, auf irgend eine Einheit (deren mittleres Fehlerquadrat k'' sein möge) bezogen, $p_1, p_2, p_3, \cdots$. Es sei ferner

$$U = F(L_1, L_2, L_3, \ldots) \tag{1}$$

eine gegebene Funktion der Grössen $L_1, L_2, L_3, \cdots$. Man soll den mittleren Fehler, dessen Quadrat K'' heissen möge, oder das Gewicht P der Bestimmung

$$u = F(l_1, l_2, l_3, \ldots) \tag{2}$$

für U berechnen.

Da U auch in der Form $F(l_1 + \varepsilon_1, l_2 + \varepsilon_2, l_3 + \varepsilon_3, \ldots)$ geschrieben werden kann, so ergibt sich, wenn man $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$ als so klein voraussetzen darf, dass Potenzen und Produkte dieser Grössen gegenüber ihren ersten Potenzen vernachlässigt werden können, für U die näherungsweise Darstellung

$$U = u + f_1\varepsilon_1 + f_2\varepsilon_2 + f_3\varepsilon_3 + \cdots,$$

wenn mit $f_1, f_2, f_3, \ldots$ die Ableitungen von u in Bezug auf $l_1, l_2, l_3, \ldots$ bezeichnet werden. Hiernach ist

$$U - u = [f\varepsilon]$$

der Fehler in der Bestimmung (2) von U und das mittlere Quadrat desselben

$$K'' = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \cdots [f\varepsilon]^2 \varphi_1(\varepsilon_1)\varphi_2(\varepsilon_2)\cdots d\varepsilon_1\, d\varepsilon_2 \cdots,$$

d. i.

$$K'' = [ffk''].\tag{3}$$

Um an die Stelle der mittleren Fehler die Gewichte einzuführen, mache man von den Relationen

$$p_1 k_1'' = p_2 k_2'' = \cdots = k'' = PK''$$

Gebrauch und findet so

$$\frac{1}{P} = \left[\frac{ff}{p}\right].\tag{4}$$

151. Aus einer Reihe von Beobachtungen l_i sind auf Grund eines Systems von Fehlergleichungen des Typus

$$\varepsilon_i = - l_i + a_i x + b_i y + c_i z + \cdots$$

die vorteilhaftesten Werte $x_1, y_1, z_1, \ldots$ der Elemente $x, y, z, \ldots$ berechnet worden. Es ist ferner

$$U = F(x, y, z, \ldots)\tag{1}$$

eine gegebene Funktion dieser Elemente. Man soll den mittleren Fehler oder das Gewicht der Bestimmung

$$u = F(x_1, y_1, z_1, \ldots)\tag{2}$$

von U feststellen.

Die Auflösung der Fehlergleichungen gibt

$$
\begin{aligned}
x &= [\alpha l] + [\alpha \varepsilon] = x_1 + [\alpha \varepsilon] \\
y &= [\beta l] + [\beta \varepsilon] = y_1 + [\beta \varepsilon] \\
z &= [\gamma l] + [\gamma \varepsilon] = z_1 + [\gamma \varepsilon] \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

wobei die Summen $[\alpha\varepsilon], [\beta\varepsilon], [\gamma\varepsilon], \ldots$ die Fehler anzeigen, welche den Werten $x_1, y_1, z_1, \ldots$ der Elemente anhaften. Setzt man diese Fehler als so klein voraus, um bei ihren ersten Potenzen stehen bleiben zu dürfen, so kann

$$U = F(x_1 + [\alpha\varepsilon], y_1 + [\beta\varepsilon], z_1 + [\gamma\varepsilon], \ldots)$$

näherungsweise durch

$$U = u + f_1[\alpha\varepsilon] + f_2[\beta\varepsilon] + f_3[\gamma\varepsilon] + \cdots$$

ersetzt werden, wenn man unter $f_1, f_2, f_3, \ldots$ die Ableitungen von u in Bezug auf $x_1, y_1, z_1, \ldots$ versteht. Hieraus folgt

$$U - u = [(\alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma f_3 + \cdots)\varepsilon]$$

als Fehler in der Bestimmung u für U, und der Mittelwert seines Quadrates ist

$$K'' = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \cdots [(\alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma f_3 + \cdots)\varepsilon]^2 \varphi_1(\varepsilon_1)\varphi_2(\varepsilon_2)\ldots d\varepsilon_1 d\varepsilon_2 \ldots,$$

oder nach Ausführung der Integrationen

$$
\begin{aligned}
K'' = f_1^2[\alpha\alpha k''] &+ 2f_1f_2[\alpha\beta k''] + 2f_1f_3[\alpha\gamma k''] + \cdots \\
&+ \ f_2^2\,[\beta\beta k''] + 2f_2f_3[\beta\gamma k''] + \cdots \\
&\qquad\qquad + \ f_3^2\,[\gamma\gamma k''] + \cdots \\
&\qquad\qquad\qquad \ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Die Summen $[\alpha\alpha k''], [\alpha\beta k''], [\alpha\gamma k''], \ldots$ können aber durch die Grössen $q'_{11}, q'_{12}, q'_{13}, \ldots$ ersetzt werden, zu deren Bestimmung die Gleichungssysteme (10), (10*), (10**), ..., Art. 126, dienen; alsdann wird

$$
\begin{aligned}
K'' = f_1^2 q'_{11} &+ 2f_1f_2q'_{12} + 2f_1f_3q'_{13} + \cdots \\
&+ \ f_2^2\, q'_{22} + 2f_2f_3q'_{23} + \cdots \qquad (3)\\
&\qquad\qquad + \ f_3^2\, q'_{33} + \cdots \\
&\qquad\qquad\quad \ldots\ldots
\end{aligned}
$$

führt man aber an Stelle der mittleren Fehler die Gewichte ein (bezogen auf eine Gewichtseinheit vom mittleren Fehlerquadrat k''), so treten an die Stelle von $q'_{11}, q'_{12}, q'_{13}, \ldots$ die

Grössen $q_{11}, q_{12}, q_{13}, \ldots$, deren Berechnung die Gleichungssysteme (10'), (10'*), (10'**), ..., Art. 127, vermitteln, und man hat dann

$$(4) \quad \begin{aligned} \frac{1}{P} = \frac{K''}{k''} = f_1^2 q_{11} + 2 f_1 f_2 q_{12} + 2 f_1 f_3 q_{13} + \cdots \\ + \quad f_2^2 q_{22} + \quad f_2 f_3 q_{23} + \cdots \\ + \quad f_3^2 q_{33} + \cdots \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{aligned}$$

152. Zwischen den n Grössen $L_1, L_2, L_3, \ldots$, für welche sich durch Beobachtung die Werte $l_1, l_2, l_3, \ldots$ ergeben haben, bestehen die ν ($< n$) Beziehungen

$$(1) \quad \begin{aligned} \Phi(L_1, L_2, L_3, \cdots) = 0 \\ \Psi(L_1, L_2, L_3, \cdots) = 0 \\ \mathrm{X}(L_1, L_2, L_3, \ldots) = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{aligned}$$

welche von den Beobachtungswerten $l_1, l_2, l_3, \ldots$ im allgemeinen nicht erfüllt werden, sondern erst dann, nachdem an diesen Korrektionen $e_1, e_2, e_3, \ldots$ angebracht worden sind; werden diese Korrektionen als so klein vorausgesetzt, dass man über ihre ersten Potenzen nicht hinauszugehen braucht, so bestehen zwischen ihnen vermöge (1) Relationen, welche näherungsweise

$$(2) \quad \begin{aligned} A_1 e_1 + A_2 e_2 + A_3 e_3 + \cdots = w_1 \\ B_1 e_1 + B_2 e_2 + B_3 e_3 + \cdots = w_2 \\ C_1 e_1 + C_2 e_2 + C_3 e_3 + \cdots = w_3 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{aligned}$$

lauten, wenn $A_1, A_2, A_3, \ldots$ die Ableitungen von

$$- w_1 = \Phi(l_1, l_2, l_3, \ldots),$$

$B_1, B_2, B_3, \ldots$ die Ableitungen von

$$- w_2 = \Psi(l_1, l_2, l_3, \ldots),$$

$C_1, C_2, C_3, \ldots$ die Ableitungen von

$$- w_3 = \mathrm{X}(l_1, l_2, l_3, \ldots)$$

in Bezug auf $l_1, l_2, l_3, \ldots$ bedeuten, während $-w_1, -w_2, -w_3, \ldots$ die Widersprüche anzeigen, welche auftauchen, sobald man die unmittelbaren Beobachtungsergebnisse in die Bedingungsgleichungen (1) einsetzt. Die Aufgabe der Auffindung der

vorteilhaftesten Werte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ für $e_1, e_2, e_3, \ldots$ ist in Art. 136 gelöst worden.

Es sei nun

$$(3) \qquad U = F(L_1, L_2, L_3, \ldots)$$

eine gegebene Funktion der Grössen $L_1, L_2, L_3, \ldots$ und es handle sich um den mittleren Fehler oder um das Gewicht der Bestimmung

$$(4) \qquad u = F(l_1 + \lambda_1, l_2 + \lambda_2, l_3 + \lambda_3, \ldots)$$

von U, welche sich ergibt, wenn man an die Stelle der wahren Werte $L_1, L_2, L_3, \ldots$ die ausgeglichenen Beobachtungen $l_1 + \lambda_1$, $l_2 + \lambda_2$, $l_3 + \lambda_3, \ldots$ einführt.

Bezeichnen wie früher $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$ die wahren Fehler von $l_1, l_2, l_3, \ldots$, so ist $U = F(l_1 + \varepsilon_1, l_2 + \varepsilon_2, l_3 + \varepsilon_3, \ldots)$, und wenn man, bei der vorausgesetzten Kleinheit der ε und λ, U und u durch die ersten Potenzen dieser Grössen darstellt, so ergibt sich

$$(5) \quad U - u = f_1(\varepsilon_1 - \lambda_1) + f_2(\varepsilon_2 - \lambda_2) + f_3(\varepsilon_3 - \lambda_3) + \cdots = [f\varepsilon] - [f\lambda]$$

als Fehler von u, wenn $f_1, f_2, f_3, \ldots$ die Ableitungen von $F(l_1, l_2, l_3, \ldots)$ in Bezug auf $l_1, l_2, l_3, \ldots$ vorstellen. Wie in Art. 136 gezeigt worden, sind $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ lineare Formen der $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$, folglich ist schliesslich auch

$$U - u = [g\varepsilon]$$

und wie in Art. 150 das Quadrat des mittleren Fehlers von u gleich

$$(6) \qquad K'' = [ggk''] = \left[\frac{gg}{p}\right] k''$$

und das reciproke Gewicht

$$(7) \qquad \frac{1}{P} = \left[\frac{gg}{p}\right].$$

Um die Koeffizienten g der Form $[g\varepsilon]$ zu erhalten, gehen wir auf die Gleichung (5), Art. 136, zurück und erhalten, wenn abkürzungsweise

$$(8) \qquad \left[\frac{Af}{p}\right] = \mathfrak{a}, \quad \left[\frac{Bf}{p}\right] = \mathfrak{b}, \quad \left[\frac{Cf}{p}\right] = \mathfrak{c}, \cdots$$

gesetzt wird,

$$(9) \qquad [f\lambda] = \mathfrak{a}k_1 + \mathfrak{b}k_2 + \mathfrak{c}k_3 + \cdots;$$

stellt man die Korrelaten $k_1, k_2, k_3, \ldots$ aus den Gleichungen (6), Art. 136, in derselben Weise dar, wie in Art. 126 die Elemente $x, y, z, \ldots$ dargestellt worden sind, nämlich in der Form

$$\begin{aligned} k_1 &= w_1 q_{11} + w_2 q_{12} + w_3 q_{13} + \cdots \\ k_2 &= w_1 q_{21} + w_2 q_{22} + w_3 q_{23} + \cdots \\ k_3 &= w_1 q_{31} + w_2 q_{32} + w_3 q_{33} + \cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

wobei die Grössen q aus den Gleichungssystemen

$$\begin{aligned} 1 &= \left[\frac{AA}{p}\right] q_{11} + \left[\frac{AB}{p}\right] q_{12} + \left[\frac{AC}{p}\right] q_{13} + \cdots \\ 0 &= \left[\frac{BA}{p}\right] q_{11} + \left[\frac{BB}{p}\right] q_{12} + \left[\frac{BC}{p}\right] q_{13} + \cdots \\ 0 &= \left[\frac{CA}{p}\right] q_{11} + \left[\frac{CB}{p}\right] q_{12} + \left[\frac{CC}{p}\right] q_{13} + \cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 &= \left[\frac{AA}{p}\right] q_{21} + \left[\frac{AB}{p}\right] q_{22} + \left[\frac{AC}{p}\right] q_{23} + \cdots \\ 1 &= \left[\frac{BA}{p}\right] q_{21} + \left[\frac{BB}{p}\right] q_{22} + \left[\frac{BC}{p}\right] q_{23} + \cdots \\ 0 &= \left[\frac{CA}{p}\right] q_{21} + \left[\frac{CB}{p}\right] q_{22} + \left[\frac{CC}{p}\right] q_{23} + \cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 &= \left[\frac{AA}{p}\right] q_{31} + \left[\frac{AB}{p}\right] q_{32} + \left[\frac{AC}{p}\right] q_{33} + \cdots \\ 0 &= \left[\frac{BA}{p}\right] q_{31} + \left[\frac{BB}{p}\right] q_{32} + \left[\frac{BC}{p}\right] q_{33} + \cdots \\ 1 &= \left[\frac{CA}{p}\right] q_{31} + \left[\frac{CB}{p}\right] q_{32} + \left[\frac{CC}{p}\right] q_{33} + \cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{10}$$

zu bestimmen sind, so wird zufolge (9) und (5)

$$\begin{aligned} U - u = [f\varepsilon] &- (\mathfrak{a} q_{11} + \mathfrak{b} q_{21} + \mathfrak{c} q_{31} + \cdots) w_1 \\ &- (\mathfrak{a} q_{12} + \mathfrak{b} q_{22} + \mathfrak{c} q_{32} + \cdots) w_2 \\ &- (\mathfrak{a} q_{13} + \mathfrak{b} q_{23} + \mathfrak{c} q_{33} + \cdots) w_3 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

hieraus ergibt sich unmittelbar, wenn man für die w ihre aus (2) resultierenden Darstellungen durch die Fehler ε einführt,

$$
\begin{aligned}
g_i = f_i &- (\mathfrak{a} q_{11} + \mathfrak{b} q_{21} + \mathfrak{c} q_{31} + \cdots) A_i \\
&- (\mathfrak{a} q_{12} + \mathfrak{b} q_{22} + \mathfrak{c} q_{32} + \cdots) B_i \\
&- (\mathfrak{a} q_{13} + \mathfrak{b} q_{23} + \mathfrak{c} q_{33} + \cdots) C_i \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

Ordnet man das Quadrat von g_i nach den eingeklammerten Aggregaten, so wird

$$
\begin{aligned}
g_i^2 = f_i^2 &- (\mathfrak{a} q_{11} + \mathfrak{b} q_{21} + \mathfrak{c} q_{31} + \cdots) \mathfrak{A}_i \\
&- (\mathfrak{a} q_{12} + \mathfrak{b} q_{22} + \mathfrak{c} q_{32} + \cdots) \mathfrak{B}_i \\
&- (\mathfrak{a} q_{13} + \mathfrak{b} q_{23} + \mathfrak{c} q_{33} + \cdots) \mathfrak{C}_i \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

worin zur Abkürzung

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{A}_i = 2 A_i f_i &- (\mathfrak{a} q_{11} + \mathfrak{b} q_{21} + \mathfrak{c} q_{31} + \cdots) A_i A_i \\
&- (\mathfrak{a} q_{12} + \mathfrak{b} q_{22} + \mathfrak{c} q_{32} + \cdots) A_i B_i \\
&- (\mathfrak{a} q_{13} + \mathfrak{b} q_{23} + \mathfrak{c} q_{33} + \cdots) A_i C_i \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

geschrieben wurde; die Bedeutung von $\mathfrak{B}_i, \mathfrak{C}_i, \ldots$ ergibt sich daraus durch Vertauschung von A_i mit $B_i, C_i, \cdots$.

Im Hinblick auf (8) und (10) ist also

$$\left[\frac{\mathfrak{A}}{p}\right] = \mathfrak{a},$$

und ebenso erkennt man, dass

$$\left[\frac{\mathfrak{B}}{p}\right] = \mathfrak{b}, \quad \left[\frac{\mathfrak{C}}{p}\right] = \mathfrak{c}, \cdots.$$

Mithin ist schliesslich, wenn man für $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots$ die Werte aus (8) restituiert,

$$
\begin{aligned}
\left[\frac{gg}{p}\right] = \left[\frac{ff}{p}\right] - \left[\frac{Af}{p}\right]^2 q_{11} &- 2\left[\frac{Af}{p}\right]\left[\frac{Bf}{p}\right] q_{12} - 2\left[\frac{Af}{p}\right]\left[\frac{Cf}{p}\right] q_{13} - \cdots \\
&- \left[\frac{Bf}{p}\right]^2 q_{22} - 2\left[\frac{Bf}{p}\right]\left[\frac{Cf}{p}\right] q_{23} - \cdots \\
&- \left[\frac{Cf}{p}\right]^2 q_{33} - \cdots \\
&\quad \cdots\cdots\cdots
\end{aligned} \tag{11}
$$

Infolge der Gleichung (7) drückt die rechte Seite das reciproke Gewicht der Bestimmung u aus und ihr mittlerer Fehler ist auf Grund von (6) zu rechnen.

153. Der vorliegende Gegenstand gestattet noch eine andere Auffassung.

Es sei $U = F(X, Y, Z, \ldots)$ eine gegebene Funktion der unbekannten Elemente $X, Y, Z, \ldots$; wie sollen die Werte der letzteren aus den Beobachtungen abgeleitet werden, damit der daraus resultierenden Bestimmung von U der kleinstmögliche mittlere Fehler oder das grösstmögliche Gewicht zukomme?

Hat man auf irgend welchem Wege Näherungswerte der Elemente gewonnen, etwa $X_0, Y_0, Z_0, \ldots$, derart, dass die an denselben anzubringenden Korrektionen $x, y, z, \ldots$ klein genug sind, um von ihren Potenzen und Produkten absehen zu dürfen, so kann U näherungsweise durch eine lineare Funktion von $x, y, z, \ldots$ gegeben werden, nämlich

$$(1) \qquad U = f_0 + f_1 x + f_2 y + f_3 z + \cdots;$$

darin ist $f_0 = F(X_0, Y_0, Z_0, \ldots)$, während $f_1, f_2, f_3, \ldots$ die Ableitungen von f_0 in Bezug auf $X_0, Y_0, Z_0, \ldots$ respektive bedeuten.

Auf Grundlage der Beobachtungen und ihrer Fehler bestehen zwischen den m Grössen $x, y, z, \ldots$ $n (> m)$ Fehlergleichungen der typischen Form

$$(2) \qquad \varepsilon_i = -l_i + a_i x + b_i y + c_i z + \cdots, \quad (i = 1, 2, \cdots n);$$

das Gewicht der i^{ten} Beobachtung, bezogen auf eine Gewichtseinheit, deren mittlerer Fehler im Quadrat gleich k'' ist, heisse p_i. Aus diesen Gleichungen ergeben sich durch lineare Kombination, unter Anwendung der Faktorensysteme $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \ldots$, welche den Bedingungen

$$(3) \qquad \begin{array}{llll} [\alpha a] = 1, & [\alpha b] = 0, & [\alpha c] = 0, & \cdots \\ [\beta a] = 0, & [\beta b] = 1, & [\beta c] = 0, & \cdots \\ [\gamma a] = 0, & [\gamma b] = 0, & [\gamma c] = 1, & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

genügen, für $x, y, z, \ldots$ die Bestimmungen

$$\begin{aligned} x &= [\alpha l] + [\alpha \varepsilon] \\ y &= [\beta l] + [\beta \varepsilon] \\ z &= [\gamma l] + [\gamma \varepsilon] \\ &\cdots\cdots \end{aligned}$$

Behält man deren erste Teile bei und rechnet damit nach (1)

$$u = f_0 + f_1[\alpha l] + f_2[\beta l] + f_3[\gamma l] + \cdots,$$

so ist damit ein Fehler im Betrage

$$(4) \qquad U - u = f_1[\alpha\varepsilon] + f_2[\beta\varepsilon] + f_3[\gamma\varepsilon] + \cdots = [g\varepsilon]$$

begangen, wenn

$$(5) \qquad g_i = f_1\alpha_i + f_2\beta_i + f_3\gamma_i + \cdots$$

als Abkürzung gebraucht wird.

Das mittlere Quadrat dieses Fehlers, nach Art. 150 gleich

$$\left[\frac{gg}{p}\right]k'',$$

wird ein Minimum, wenn

$$(6) \qquad \left[\frac{gg}{p}\right] \text{ ein Minimum.}$$

Die Grössen g_i sind aber nicht unabhängig von einander, weil die Faktoren $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \ldots$ es nicht sind. Multipliziert man nämlich jede der Gleichungen (5) mit dem korrespondierenden a_i, dann mit $b_i, c_i, \ldots$ und nimmt bei der darauffolgenden Summierung Rücksicht auf die Relationen (3), so ergeben sich für die g_i die m Bedingungen

$$(7) \quad [ga] - f_1 = 0, \quad [gb] - f_2 = 0, \quad [gc] - f_3 = 0, \cdots.$$

Das in Bezug auf diese Bedingungen gebildete Minimum von $\left[\frac{gg}{p}\right]$ fällt überein mit dem absoluten Minimum der Funktion

$$\left[\frac{gg}{p}\right] - 2k_1([ga] - f_1) - 2k_2([gb] - f_2) - 2k_3([gc] - f_3) - \cdots,$$

woraus sich für das System g_i die Bestimmungen

$$(8) \qquad \frac{g_i}{p_i} = a_i k_1 + b_i k_2 + c_i k_3 + \cdots$$

ergeben, nachdem man die Korrelaten $k_1, k_2, k_3, \ldots$ mittels der aus (7) resultierenden Gleichungen

$$(9) \qquad \begin{array}{l} [paa]k_1 + [pab]k_2 + [pac]k_3 + \cdots = f_1 \\ [pba]k_1 + [pbb]k_2 + [pbc]k_3 + \cdots = f_2 \\ [pca]k_1 + [pcb]k_2 + [pcc]k_3 + \cdots = f_3 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{array}$$

berechnet hat.

Diese Gleichungen stimmen aber in ihren Koeffizienten genau mit denjenigen Gleichungen überein, welche die Methode der kleinsten Quadrate zur Bestimmung von $x, y, z, \ldots$ auf Grund des Gleichungssystems (2) vorschreibt, und ergeben

$$\begin{aligned}
k_1 &= f_1 q_{11} + f_2 q_{12} + f_3 q_{13} + \cdots \\
k_2 &= f_1 q_{21} + f_2 q_{22} + f_3 q_{23} + \cdots \\
k_3 &= f_1 q_{31} + f_2 q_{32} + f_3 q_{33} + \cdots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

wobei die Grössen q_{ij} genau dieselben Werte haben wie in Art. 127.

Multipliziert man schliesslich jede der Gleichungen (8) mit dem entsprechenden g_i, bildet die Summe mit Rücksicht auf (7) und setzt für $k_1, k_2, k_3, \ldots$ die eben gefundenen Werte ein, so wird

$$\begin{aligned}
\min\left[\frac{gg}{p}\right] = \frac{1}{\max P} = f_1^2 q_{11} &+ 2f_1 f_2 q_{12} + 2f_1 f_3 q_{13} + \cdots \\
(10) \qquad &+ \quad f_2^2 q_{22} + 2f_2 f_3 q_{23} + \cdots \\
&\qquad\qquad + \quad f_3^2 q_{33} + \cdots \\
&\qquad\qquad\qquad \ldots\ldots
\end{aligned}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung fällt aber überein mit demjenigen Wert für das reciproke Gewicht, welcher sich in Art. 151 ergeben hat, als man zur Bestimmung von u die nach der Methode der kleinsten Quadrate berechneten Werte von $x, y, z, \ldots$ verwendet hat. Diese Werte erfreuen sich also der Eigenschaft, dass sie für jede Funktion der Elemente eine Bestimmung von grösstmöglichem Gewichte ergeben.

Dritter Teil.

Theorie der Fehler in der Ebene und im Raume.

§ 1. Das Gesetz der Fehler in der Ebene und im Raume.

154. Die Bestimmung einer einzelnen Grösse durch Beobachtung ist vergleichbar der Bestimmung der Lage eines Punktes in einer Geraden; der wahre Wert der Grösse ist durch einen bestimmten, bekannten oder unbekannten Punkt jener Geraden dargestellt und ebenso liefert jede Beobachtung einen Punkt der Geraden, der infolge des Beobachtungsfehlers von dem ersteren verschieden ist; die Strecke zwischen beiden Punkten repräsentiert den begangenen Fehler. Insofern derlei Fehler durch Strecken einer Geraden versinnlicht werden können, bezeichnet man sie als lineare Fehler. Zur Veranschaulichung des Gesetzes ihrer Wirksamkeit kann dieselbe Gerade dienen, indem man sie als materiell sich vorstellt und ihr in jedem Punkte eine Dichte zuschreibt, welche der Wahrscheinlichkeit des durch diesen Punkt begrenzten Fehlers proportional ist. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Endpunkt des Fehlers, dessen Anfangspunkt immer mit dem Repräsentanten des wahren Wertes zusammenfällt, einem beliebigen Teile der Geraden angehöre, kommt der Masse dieses Teiles gleich, die Masse der ganzen Geraden als Einheit angenommen.

Wenn es sich um die Bestimmung eines Punktes in der Ebene oder im Raume handelt, so wird jede Einzelbestimmung durch Beobachtungen zu einem andern Punkte der Ebene, respektive des Raumes führen, der von der wahren, bekannten oder unbekannten Lage des Punktes verschieden ist; an dem Fehler, der wieder dargestellt ist durch die

Verbindungslinie des wahren Punktes, als Ursprung der Fehler, mit dem beobachteten, tritt jetzt zu dem Merkmal der Grösse, welches früher neben dem Vorzeichen das einzige war, das Merkmal der Richtung hinzu. Der Fehler kann im allgemeinen bei bestimmter Grösse alle Richtungen annehmen, welche von dem wahren Punkte in der Ebene oder im Raume ausgehen. Insofern derlei Fehler zu ihrer Darstellung der Ebene, beziehungsweise des Raumes bedürfen, nennt man sie Fehler in der Ebene oder Fehler im Raume.

Um das Gesetz der Fehler in der Ebene zu verbildlichen, kann man die Ebene selbst benützen, indem man sie sich als materiell und mit einer Dichte begabt denkt, welche in jedem Punkte proportional ist der Wahrscheinlichkeit des durch ihn begrenzten Fehlers. Es ist alsdann die Wahrscheinlichkeit, dass der Endpunkt des Fehlers einem irgendwie begrenzten Teil der Ebene angehöre, durch die Masse dieses Teils gegeben, wenn die Masse der ganzen Fehlerebene als Einheit aufgefasst wird. Neben dieser Veranschaulichung gibt es noch eine rein geometrische, welche darin besteht, dass man in jedem Punkte der Ebene zu derselben ein Loth errichtet und darauf eine der zugehörigen Wahrscheinlichkeit proportionale Länge abträgt; man wird auf diese Weise zu einer Wahrscheinlichkeitsfläche geführt, dem Analogon der Wahrscheinlichkeitskurve bei linearen Fehlern.

Zur Versinnlichung der Wirkungsweise räumlicher Fehler kann der Raum selbst herangezogen werden; man denkt sich ihn zu diesem Zwecke mit Materie erfüllt, deren Dichte in jedem Punkte proportional ist der Wahrscheinlichkeit des durch diesen Punkt begrenzten Fehlers. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Endpunkt des Fehlers in einen irgendwie begrenzten Teil des Raumes fällt, ist durch die darin enthaltene Masse bestimmt, wenn die Masse des ganzen Fehlerraums als Einheit dient. Eine rein geometrische Darstellung des Fehlergesetzes wie bei linearen und ebenen Fehlern ist hier nicht möglich.

Auf solche Art entsteht der Begriff des Wahrschein-

lichkeitskörpers, der sich bei Fehlern in der Ebene auf den einer materiellen ebenen Figur, bei linearen Fehlern auf den einer materiellen Geraden reduziert. So wie die Fehler einer jeden Gattung von Beobachtungen an gewisse Grenzen gebunden sind, so hat man sich auch diese ideellen Gebilde als begrenzt vorzustellen. Die Begrenzung erfolgt durch eine Fläche, eine Kurve, ein Punktepaar; bei ihrer Überschreitung sollte die Funktion, welche die Dichte und somit auch das Fehlergesetz ausdrückt, eine Unterbrechung ihres stetigen Verlaufs erleiden, indem sie Null wird und Null bleibt; bleibt sie auch über die Begrenzung hinaus stetig, so ist zu beachten, dass sie nur innerhalb derselben Geltung hat und dass ihre Fortsetzung gewissermaassen parasitisch ist.

Bevor wir uns dieser von Schols begründeten Auffassung der Fehler in der Ebene und im Raume zuwenden, wollen wir uns mit solchen Darstellungen dieses Gegenstandes befassen, welche sich nur auf die Theorie der linearen Fehler gründen.

155. Die erste Spur einer Betrachtung von Fehlern in der Ebene findet sich in der schon an einer andern Stelle*) erwähnten Untersuchung Adrain's. Es handelt sich ihm darum, einen zweiten Beweis für das Gesetz linearer Fehler zu führen; dabei kommt er auf den Fehler in der Bestimmung der Lage eines Punktes in der Ebene zu sprechen, ohne diesen Gedanken jedoch allgemeiner zu fassen und weiter auszuführen. Die Darstellung, in etwas veränderter Bezeichnung, ist die folgende**).

Es sei die Länge und Neigung einer Geraden AB, Fig. 6, zu messen, und es seien die sehr kleinen Strecken Bb, Bc gleich wahrscheinliche Fehler, der eine, $Bb = Bb'$, in der Länge von AB, der andere, $Bc = Bc'$ (senkrecht zum ersten) in der Neigung, letztere gemessen durch einen Kreisbogen vom Halbmesser AB. Die Frage geht nun dahin, eine solche durch die vier von B gleich weit entfernten

---

*) S. Art. 42.

**) Nach Merriman's „List of Writings relating to the Method of Least Squares", Connecticut Transact., IV, pag. 164.

Punkte b, c, b', c' gehende Kurve zu finden, dass, indem man die Messung von A ausgehend voraussetzt, die Wahrscheinlichkeit, der Endpunkt falle in irgend einen Punkt jener

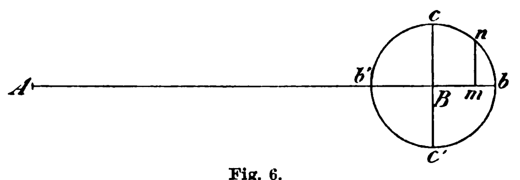


Fig. 6.

Kurve, dieselbe ist wie dafür, dass er sich in einem der vier Punkte b, c, b', c' befinde; mit andern Worten, den Ort gleich wahrscheinlicher Lagen des Punktes B zu bestimmen.

Durch einige wenig befriedigende Schlüsse, worunter auch der, die Kurve müsse möglichst einfach sein, kommt Adrain zu dem Resultate, die gesuchte Kurve sei der durch die vier Punkte bestimmte Kreis, dessen Mittelpunkt B ist.

Darauf gründet er nun die Ableitung des Fehlergesetzes. Ist $Bm = x$ der Fehler in der Länge, $mn = y$ der Fehler in der Neigung, X die Wahrscheinlichkeit des ersteren, Y jene des letzteren, so ist für alle Punkte jenes Kreises $XY =$ const., also auch $l \cdot X + l \cdot Y =$ const., folglich weiter

$$\frac{dl \cdot X}{dx} dx = - \frac{dl \cdot Y}{dy} dy,$$

und da $x^2 + y^2 = Bb^2$, so ist auch

$$xdx = - ydy;$$

durch Division der beiden Differentialgleichungen ergibt sich

$$\frac{1}{x} \frac{dl \cdot X}{dx} = \frac{1}{y} \frac{dl \cdot Y}{dy}.$$

Da nun Adrain als selbstverständlich annimmt, X und Y seien „ähnliche Funktionen“, so schliesst er aus dieser Beziehung, dass

$$\frac{1}{x} \frac{dl \cdot X}{dx} = n$$

sein müsse, wenn n eine Konstante bedeutet; daraus aber erhält man durch Integration

$$X = e^{c + \frac{nx^2}{2}}$$

und ebenso sei

$$Y = e^{c + \frac{n y^2}{2}};$$

hierzu bemerkt Adrain noch, dass n notwendig negativ sei, weil die Wahrscheinlichkeit abnimmt, wenn x, respektive y wächst.

Es hätte nur noch eines Schrittes bedurft, um zu dem Schlusse zu kommen, die Wahrscheinlichkeit der Lage n des Punktes B hänge von einem Ausdruck der Form $e^{\mu(x^2+y^2)}$ ab. Übrigens mag bemerkt werden, dass der hier befolgte Gedankengang derselbe ist wie der von Herschel bei seinem Beweise gebrauchte (s. Art. 43), daher auch denselben Einwürfen ausgesetzt.

Wie bei Adrain's erstem Beweise erscheint auch hier die Wahrscheinlichkeit eines bestimmten Wertes von x durch eine endliche Grösse ausgedrückt.

156. Die erste Untersuchung über die Fehler in der Bestimmung eines Punktes in der Ebene und im Raume rührt von Bravais her und ist in einer ausführlichen, durch schöne Analyse ausgezeichneten Abhandlung*) niedergelegt. Sie enthält fast alle wesentlichen Resultate, welche auf diesem Gebiete später zu Tage gefördert worden sind. Nur die Voraussetzungen, von welchen sie ausgeht, sind sehr spezieller Natur.

Die Koordinaten X, Y eines Punktes in der Ebene seien als Funktionen der durch Beobachtung zu bestimmenden Grössen $L_1, L_2, \cdots L_n$ gegeben, und zwar

$$(1) \qquad \begin{aligned} X &= f(L_1, L_2, \cdots L_n) \\ Y &= g(L_1, L_2, \cdots L_n). \end{aligned}$$

Die Beobachtungen mögen für die Elemente $L_1, L_2, \dots L_n$ die Werte $l_1, l_2, \dots l_n$ ergeben haben, welchen die Fehler $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \varepsilon_n$ anhaften. Setzt man

$$\begin{aligned} X_0 &= f(l_1, l_2, \cdots l_n) \\ Y_0 &= g(l_1, l_2, \cdots l_n), \end{aligned}$$

---

*) Analyse mathématique sur les probabilités des erreurs de situation d'un point. Mém. prés. par divers savans à l'Acad. r. des sciences de l'Inst. de France, IX (1846), pag. 255—332.

so sind $X - X_0 = x$, $Y - Y_0 = y$ die Fehler dieser Bestimmung und können, wenn man $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \varepsilon_n$ als so klein voraussetzt, dass ihre Potenzen und Produkte vernachlässigt werden dürfen, ausgedrückt werden in der Form

$$
(2) \qquad \begin{aligned} x &= a_1 \varepsilon_1 + a_2 \varepsilon_2 + \cdots + a_n \varepsilon_n \\ y &= b_1 \varepsilon_1 + b_2 \varepsilon_2 + \cdots + b_n \varepsilon_n, \end{aligned}
$$

wobei

$$
a_1 = \frac{\partial X_0}{\partial l_1}, \quad a_2 = \frac{\partial X_0}{\partial l_2}, \quad \dots \quad a_n = \frac{\partial X_0}{\partial l_n},
$$

$$
b_1 = \frac{\partial Y_0}{\partial l_1}, \quad b_2 = \frac{\partial Y_0}{\partial l_2}, \quad \dots \quad b_n = \frac{\partial Y_0}{\partial l_n}.
$$

Es wird nun die Annahme gemacht, dass jeder der Werte $l_1, l_2, \dots l_n$ hervorgegangen sei aus einer sehr grossen Anzahl von Beobachtungen und darauf mit Hinweis auf Laplace's Analyse geschlossen, dass jeder der Fehler ε_i dem Exponentialgesetze $\frac{h_i}{\sqrt{\pi}} e^{-h_i^2 \varepsilon_i^2}$ folge.

Wären X, Y unabhängig von einander, so wären es auch ihre Fehler x, y und würden einzeln demselben Gesetze unterworfen sein — der Form nach — wie die ε, so zwar, dass die Wahrscheinlichkeit, es falle x zwischen die Grenzen x und $x + dx$, beziehungsweise y zwischen die Grenzen y und $y + dy$, den Ausdruck hätte*) $\frac{h_x}{\sqrt{\pi}} e^{-h_x^2 x^2} dx$, respektive $\frac{h_y}{\sqrt{\pi}} e^{-h_y^2 y^2} dy$, worin

$$
(3) \qquad \begin{aligned} \frac{1}{h_x^2} &= \frac{a_1^2}{h_1^2} + \frac{a_2^2}{h_2^2} + \cdots + \frac{a_n^2}{h_n^2} = \left[\frac{aa}{hh}\right] \\ \frac{1}{h_y^2} &= \frac{b_1^2}{h_1^2} + \frac{b_2^2}{h_2^2} + \cdots + \frac{b_n^2}{h_n^2} = \left[\frac{bb}{hh}\right]. \end{aligned}
$$

---

*) Bravais beruft sich hierbei auf Laplace; in dieser Form sind aber die Resultate bei Laplace nirgends ausgesprochen. Der Beweis kann wie folgt gegeben werden. Wenn ε_i dem Gesetze $\frac{h_i}{\sqrt{\pi}} e^{-h_i^2 \varepsilon_i^2}$ folgt, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe $a_1 \varepsilon_1 + a_2 \varepsilon_2 + \cdots + a_n \varepsilon_n = [a \varepsilon]$ zwischen den Grenzen x und $x + dx$ liege, ausgedrückt durch (s. Art. 60)

In Wirklichkeit aber hängen X und Y vermöge der Elemente, welche zu ihrer Bestimmung verwendet werden, mit einander zusammen, und um die Wahrscheinlichkeit zu finden, dass ihre Fehler x, y zwischen bezeichneten Grenzen sich bewegen, hat man den Ausdruck

$$\frac{h_1 h_2 \dots h_n}{\pi^{\frac{n}{2}}} e^{-(h_1^2\varepsilon_1^2+h_2^2\varepsilon_2^2+\cdots+h_n^2\varepsilon_n^2)} d\varepsilon_1 d\varepsilon_2 \dots d\varepsilon_n \tag{4}$$

für die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens bestimmter Werte der n Beobachtungsfehler ε auf jenem Wertgebiete zu integrieren, welcher den bezeichneten Grenzen entspricht.

$$\frac{h_1 h_2 \dots h_n}{\pi^{\frac{n}{2}}} \frac{dx}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} \cos([a\varepsilon]-x)\Theta\, e^{-[hh\varepsilon\varepsilon]} d\varepsilon_1 d\varepsilon_2 \cdots d\varepsilon_n d\Theta$$

$$=\Re\left\{\frac{h_1 h_2 \dots h_n}{\pi^{\frac{n}{2}}} \frac{dx}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-x\Theta\sqrt{-1}} \left(\prod_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-h_i^2\varepsilon_i^2+a_i\varepsilon_i\Theta\sqrt{-1}} d\varepsilon_i\right) d\Theta\right\}$$

$$=\Re\left\{\frac{h_1 h_2 \dots h_n}{\pi^{\frac{n}{2}}} \frac{dx}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-x\Theta\sqrt{-1}} \left(\prod \frac{\sqrt{\pi}}{h_i} e^{-\frac{a_i^2\Theta^2}{4h_i^2}}\right) d\Theta\right\}$$

$$=\Re\left\{\frac{dx}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{4}\left[\frac{aa}{hh}\right]\Theta^2-x\Theta\sqrt{-1}} d\Theta\right\}$$

$$=\frac{dx}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{4}\left[\frac{aa}{hh}\right]\Theta^2} \cos x\Theta\, d\Theta$$

$$=\frac{dx}{\sqrt{\pi\left[\frac{aa}{hh}\right]}}\, e^{-\frac{x^2}{\left[\frac{aa}{hh}\right]}};$$

sie ist also thatsächlich von der Form $\frac{h_x}{\sqrt{\pi}} e^{-h_x^2 x^2} dx$, wobei

$$\frac{1}{h_x^2} = \left[\frac{aa}{hh}\right].$$

Um diese Integrationen auszuführen, fügt **Bravais** den zwei Gleichungen (2) noch $n - 2$ Gleichungen derselben Gestalt hinzu, deren Koeffizienten willkürlich sind und deren linke Seiten $z, \ldots w$ als $n - 2$ neue abhängige Variable angesehen werden. Mit Hilfe der so gewonnenen n Gleichungen werden $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ aus (4) eliminiert, der Ausdruck ist dadurch in den Variabeln $x, y, z, \ldots w$ dargestellt und seine Integration in Bezug auf $w, \ldots z$ zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$, welche den Grenzen der ε entsprechen, führt schliesslich auf die Wahrscheinlichkeit einer Wertverbindung von x, y, auf jene Wahrscheinlichkeit also, um die es sich zunächst handelt. Dieser sinnreiche Vorgang stellt sich für $n = 4$ wie folgt dar.

Aus den Gleichungen

$$(5) \qquad \begin{aligned} x &= a_1 \varepsilon_1 + a_2 \varepsilon_2 + a_3 \varepsilon_3 + a_4 \varepsilon_4 \\ y &= b_1 \varepsilon_1 + b_2 \varepsilon_2 + b_3 \varepsilon_3 + b_4 \varepsilon_4 \\ z &= c_1 \varepsilon_1 + c_2 \varepsilon_2 + c_3 \varepsilon_3 + c_4 \varepsilon_4 \\ w &= d_1 \varepsilon_1 + d_2 \varepsilon_2 + d_3 \varepsilon_3 + d_4 e_4 \end{aligned}$$

ergibt sich durch Auflösung, wenn nur die Determinante

$$R = (a_1 b_2 c_3 d_4)$$

von Null verschieden ist,

$$(6) \qquad \begin{aligned} \varepsilon_1 &= A_1 x + A_2 y + A_3 z + A_4 w = A + A_4 w \\ \varepsilon_2 &= B_1 x + B_2 y + B_3 z + B_4 w = B + B_4 w \\ \varepsilon_3 &= C_1 x + C_2 y + C_3 z + C_4 w = C + C_4 w \\ \varepsilon_4 &= D_1 x + D_2 y + D_3 z + D_4 w = D + D_4 w, \end{aligned}$$

wobei A eine Abkürzung ist für die Summe $A_1 x + A_2 y + A_3 z$, u. s. f.

Der Exponent von e in (4) verwandelt sich durch diese Substitution in

$$-(M + 2Nw + Pw^2),$$

wobei

$$(7) \qquad \begin{aligned} M &= h_1^2 A^2 + h_2^2 B^2 + h_3^2 C^2 + h_4^2 D^2 \\ N &= h_1^2 A A_4 + h_2^2 B B_4 + h_3^2 C C_4 + h_4^2 D D_4 \\ P &= h_1^2 A_4^2 + h_2^2 B_4^2 + h_3^2 C_4^2 + h_4^2 D_4^2, \end{aligned}$$

und der ganze Ausdruck (4) geht über in

$$(8) \qquad \frac{1}{R}\frac{h_1 h_2 h_3 h_4}{(\sqrt{\pi})^4} e^{-(M+2Nw+Pw^2)} dx\, dy\, dz\, dw.$$

Nach vollzogener Integration in Bezug auf w zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ wird daraus

$$(9) \qquad \frac{1}{R}\frac{h_1 h_2 h_3 h_4}{(\sqrt{\pi})} \sqrt{\frac{\pi}{P}} e^{-\frac{MP-N^2}{P}} dx\, dy\, dz.$$

Es kann nun nachgewiesen werden, dass bei diesem Vorgange zugleich die Koeffizienten d_1, d_2, d_3, d_4 der letzten Gleichung in (5) aus dem Ausdruck (8) verschwunden sind, so dass der Ausdruck (9) nur noch die Koeffizienten der drei ersten Gleichungen enthält.

Die Determinante $MP - N^2$ löst sich nämlich nach der bekannten Identität von Lagrange in eine Summe von Quadraten auf, deren Glieder den Typus

$$h_1^2 h_2^2 (AB_4 - BA_4)^2$$

haben, so dass, wenn man für A, B die ursprünglichen Bedeutungen zurückführt,

$$MP - N^2 = h_1^2 h_2^2 \{(A_1 B_4 - B_1 A_4)x + (A_2 B_4 + B_2 A_4)y \\ + (A_3 B_4 - B_3 A_4)z\}^2 + \cdots$$

wird. Ist

$$\begin{matrix} \alpha_1 \, \alpha_2 \, \alpha_3 \, \alpha_4 \\ \beta_1 \, \beta_2 \, \beta_3 \, \beta_4 \\ \gamma_1 \, \gamma_2 \, \gamma_3 \, \gamma_4 \\ \delta_1 \, \delta_2 \, \delta_3 \, \delta_4 \end{matrix}$$

das adjungierte System der Determinante R, so ist vermöge des Zusammenhanges zwischen den Gleichungssystemen (5) und (6)

$$A_1 = \frac{\alpha_1}{R}, \qquad A_4 = \frac{\delta_1}{R},$$

$$B_1 = \frac{\alpha_2}{R}, \qquad B_4 = \frac{\delta_2}{R},$$

folglich*)

$$A_1 B_4 - B_1 A_4 = \frac{\alpha_1 \delta_2 - \alpha_2 \delta_1}{R^2} = \frac{R(b_3 c_4 - b_4 c_3)}{R^2} = \frac{b_3 c_4 - b_4 c_3}{R},$$

*) Baltzer, Det., 5. Aufl., pag. 63.

ebenso

$$A_2 B_4 - B_2 A_4 = \frac{\beta_1 \delta_2 - \beta_2 \delta_1}{R^2} = \frac{a_3 c_4 - a_4 c_3}{R} \text{ u. s. w.}$$

Es erhält somit der Zähler $MP - N^2$ des Exponenten in (9) nach der Transformation den Nenner R^2; der Nenner P, wenn man darin A_4, B_4, C_4, D_4 durch ihre Werte

$$\frac{\delta_1}{R} = \frac{(a_2 b_3 c_4)}{R}, \quad \frac{\delta_2}{R} = \frac{(a_3 b_4 c_1)}{R}, \quad \frac{\delta_3}{R} = \frac{(a_4 b_1 c_2)}{R}, \quad \frac{\delta_4}{R} = \frac{(a_1 b_2 c_3)}{R}$$

ersetzt, erhält ihn ebenfalls, somit fällt R aus und der Exponent enthält keinen Koeffizienten der letzten Gleichung in (5); aus den nämlichen Gründen fällt R auch in dem Faktor vor der Exponentiellen in (9) aus, so dass der ganze Ausdruck von den genannten Koeffizienten befreit ist, wie behauptet wurde.

Der Erfolg der Integration in Bezug auf w besteht also darin, dass der Ausdruck (8), welcher die Gestalt hatte

$$\frac{H}{(\sqrt{\pi})^4} e^{-f_4} \, dx \, dy \, dz \, dw,$$

wobei f_4 eine quadratische Form von x, y, z, w bedeutet, und die Koeffizienten aller Gleichungen in (5) enthielt, übergegangen ist in einen Ausdruck

$$\frac{J}{(\sqrt{\pi})^3} e^{-f_3} \, dx \, dy \, dz,$$

in welchem f_3 eine quadratische Form blos von x, y, z ist und der die Koeffizienten der letzten Gleichung in (5) nicht mehr enthält. Diesen wird die Integration in Bezug auf z verwandeln in

$$\frac{K}{(\sqrt{\pi})^2} e^{-f_2} \, dx \, dy,$$

wo f_2 eine quadratische Form in x, y bezeichnet und nur mehr die Koeffizienten der ursprünglichen Gleichungen (2) auftreten.

Es ist demnach die Wahrscheinlichkeit, dass die Fehler x, y der Koordinaten, bezogen auf den Punkt X_0, Y_0, zwischen den bezüglichen Grenzen x und $x + dx$, y und $y + dy$ eingeschlossen sind, durch einen Ausdruck der Gestalt

$$(10) \qquad p = \frac{K}{\pi} e^{-(a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2)} dx\, dy$$

bestimmt.

157. Zur Auffindung der Konstanten $K, a_{11}, a_{12}, a_{22}$ kann der folgende Weg eingeschlagen werden.

1) Integriert man p in Bezug auf y zwischen den Grenzen $-\infty$ und ∞, so bedeutet das Resultat die Wahrscheinlichkeit, dass x als unabhängig von y aufgefasst zwischen x und $x + dx$ liege; der so gefundene Ausdruck

$$\frac{K}{\sqrt{\pi a_{22}}} e^{-\frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{a_{22}} x^2} dx$$

muss also übereinstimmen mit dem früher aufgestellten

$$\frac{h_x}{\sqrt{\pi}} e^{-h_x^2 x^2} dx;$$

daraus schliesst man, dass

$$(11) \qquad K^2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \qquad \text{und} \qquad \frac{a_{22}}{K^2} = \left[\frac{aa}{hh}\right].$$

2) Das Resultat der Integration von p in Bezug auf x zwischen den Grenzen $-\infty$ und ∞, d. i.

$$\frac{K}{\sqrt{\pi a_{11}}} e^{-\frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{a_{11}} y^2} dy,$$

muss aus analogen Gründen mit $\frac{h_y}{\sqrt{\pi}} e^{-h_y^2 y^2} dy$ zusammenfallen, woraus sich ergibt

$$(12) \qquad \frac{a_{11}}{K^2} = \left[\frac{bb}{hh}\right].$$

Man hat also, wenn die Summen $\left[\frac{aa}{hh}\right]$, $\left[\frac{bb}{hh}\right]$ abkürzungsweise mit α_{11}, α_{22} bezeichnet werden, vorläufig die drei Gleichungen

$$(13) \qquad \begin{aligned} a_{22} &= K^2 \alpha_{11} \\ a_{11} &= K^2 \alpha_{22} \\ K^2 &= a_{11}a_{22} - a_{12}^2. \end{aligned}$$

3) Zur Gewinnung einer vierten Gleichung werde das Koordinatensystem bei festbleibendem Ursprung X_0, Y_0 um den Winkel ϑ gedreht. Bezeichnet man die Koordinaten des Punktes x, y im neuen System mit $(x), (y)$, so ist

$$(14)\qquad \begin{aligned} x &= (x)\cos\vartheta - (y)\sin\vartheta \\ y &= (x)\sin\vartheta + (y)\cos\vartheta; \end{aligned}$$

der Ausdruck (10) ändert durch diese Transformation seine Gestalt nicht, und bezeichnet man die den früheren Grössen analogen mit demselben aber eingeklammerten Buchstaben, so ist, wie man leicht überblickt,

$$(15)\qquad \begin{aligned} (a_{11}) &= a_{11}\cos^2\vartheta + 2a_{12}\cos\vartheta\sin\vartheta + a_{22}\sin^2\vartheta \\ (a_{22}) &= a_{11}\sin^2\vartheta - 2a_{12}\cos\vartheta\sin\vartheta + a_{22}\cos^2\vartheta \\ (a_{12}) &= (a_{22} - a_{11})\cos\vartheta\sin\vartheta + a_{12}(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta); \end{aligned}$$

ferner bestehen zwischen (K), (a_{11}), (a_{12}), (a_{22}), (α_{11}), (α_{22}) analoge Gleichungen, wie sie zwischen den ursprünglichen Grössen bestanden haben, und es folgt insbesondere aus $(a_{22}) = (K)^2(\alpha_{11})$ und $(a_{11}) = (K)^2(\alpha_{22})$, dass wegen (15) und (13)

$$(16)\qquad \frac{(\alpha_{22})}{(\alpha_{11})} = \frac{(a_{11})}{(a_{22})} = \frac{\alpha_{22}\cos^2\vartheta + 2a_{12}K^{-2}\cos\vartheta\sin\vartheta + \alpha_{11}\sin^2\vartheta}{\alpha_{22}\sin^2\vartheta - 2a_{12}K^{-2}\cos\vartheta\sin\vartheta + \alpha_{11}\cos^2\vartheta}.$$

Andererseits folgt aus (14) in Verbindung mit (2), dass

$$\begin{aligned} (x) &= (\ \ a_1\cos\vartheta + b_1\sin\vartheta)\varepsilon_1 + (\ \ a_2\cos\vartheta + b_2\sin\vartheta)\varepsilon_2 + \cdots \\ (y) &= (-a_1\sin\vartheta + b_1\cos\vartheta)\varepsilon_1 + (-a_2\sin\vartheta + b_2\cos\vartheta)\varepsilon_2 + \cdots, \end{aligned}$$

woraus sich unmittelbar

$$\begin{aligned} (\alpha_{11}) &= \frac{1}{h_1^2}(a_1\cos\vartheta + b_1\sin\vartheta)^2 + \frac{1}{h_2^2}(a_2\cos\vartheta + b_2\sin\vartheta)^2 + \cdots \\ &= \alpha_{11}\cos^2\vartheta + 2\left[\frac{ab}{hh}\right]\cos\vartheta\sin\vartheta + \alpha_{22}\sin^2\vartheta \\ (\alpha_{22}) &= \frac{1}{h_1^2}(-a_1\sin\vartheta + b_1\cos\vartheta)^2 + \frac{1}{h_2^2}(-a_2\sin\vartheta + b_2\cos\vartheta)^2 + \cdots \\ &= \alpha_{11}\sin^2\vartheta - 2\left[\frac{ab}{hh}\right]\cos\vartheta\sin\vartheta + \alpha_{22}\cos^2\vartheta \end{aligned}$$

und somit

$$(17)\qquad \frac{(\alpha_{22})}{(\alpha_{11})} = \frac{\alpha_{22}\cos^2\vartheta - 2\left[\frac{ab}{hh}\right]\cos\vartheta\sin\vartheta + \alpha_{11}\sin^2\vartheta}{\alpha_{22}\sin^2\vartheta + 2\left[\frac{ab}{hh}\right]\cos\vartheta\sin\vartheta + \alpha_{11}\cos^2\vartheta}$$

ergibt. Da die beiden Darstellungen (16) und (17) für alle Werte von ϑ übereinstimmen müssen, so ist notwendig

$$K^{-2}a_{12} = -\left[\frac{ab}{hh}\right].$$

Bezeichnet man also die Summe $\left[\frac{ab}{hh}\right]$ Kürze halber mit α_{12}, so kommt zu den Gleichungen (13) als vierte Gleichung

(13*) $$a_{12} = -K^2 \alpha_{12}$$

hinzu.

Aus (13) und (13*) findet sich nun leicht

$$\frac{1}{K^2} = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2 = \left[\frac{aa}{hh}\right]\left[\frac{bb}{hh}\right] - \left[\frac{ab}{hh}\right]^2$$

(18) $$= \left(\frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{h_1 h_2}\right)^2 + \left(\frac{a_1 b_3 - a_3 b_1}{h_1 h_3}\right)^2 + \cdots$$

$$= \sum \left\{\frac{(a_i b_j)}{h_i h_j}\right\}^2,$$

die Summierung auf alle Kombinationen der Zeiger $1, 2, \ldots n$ zu zweien erstreckt, und hiermit sind auch die Grössen a_{11}, a_{22}, a_{12} leicht bestimmt. Aus (18) erkennt man zugleich, dass K^2, d. i. die Determinante der quadratischen Form im Exponenten von (10), eine positive Grösse ist.

Mit Rücksicht auf (13) und (13*) kann (10) auch in der Form

(10*) $$p = \frac{K}{\pi} e^{-K^2(\alpha_{22}x^2 - 2\alpha_{12}xy + \alpha_{11}y^2)} dx\, dy$$

geschrieben werden.

Das wesentliche Resultat, zu welchem diese Analyse führt, besteht nun in Folgendem: Alle Wertverbindungen x, y, welche der Gleichung

(19) $$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = \text{const.}$$

genügen, haben dieselbe Wahrscheinlichkeit. Da aber diese Gleichung, wie aus den eben gemachten Bemerkungen hervorgeht, eine Ellipse darstellt, beziehungsweise ein ganzes System von Ellipsen, wenn man der const. nach und nach verschiedene Werte beilegt, so schliesst man, dass Punkte gleicher Wahrscheinlichkeit auf ähnlichen, konzentrischen und ähnlich liegenden Ellipsen mit X_0, Y_0 als gemeinsamem Mittelpunkt angeordnet sind.

158. Ohne eine Wiederholung der ganzen Analyse nötig zu haben, kann man das für einen Punkt im Raume geltende Resultat seiner Form nach unmittelbar hinstellen. Unter

den im Eingange von Art. 156 gemachten Voraussetzungen bestehen zwischen den Fehlern x, y, z der Koordinaten
$X_0 = f_1(l_1, l_2, \dots l_n)$, $Y_0 = f_2(l_1, l_2, \dots l_n)$, $Z_0 = f_3(l_1, l_2, \dots l_n)$
des zu bestimmenden Punktes und den Fehlern $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \varepsilon_n$ der beobachteten Elemente die Gleichungen

$$\begin{aligned} x &= a_1 \varepsilon_1 + a_2 \varepsilon_2 + \cdots + a_n \varepsilon_n \\ y &= b_1 \varepsilon_1 + b_2 \varepsilon_2 + \cdots + b_n \varepsilon_n \\ z &= c_1 \varepsilon_1 + c_2 \varepsilon_2 + \cdots + c_n \varepsilon_n, \end{aligned} \tag{20}$$

wo $a_1 = \frac{\partial X_0}{\partial l_1}, \cdots;$ $b_1 = \frac{\partial Y_0}{\partial l_1}, \cdots;$ $c_1 = \frac{\partial Z_0}{\partial l_1}, \cdots,$ und für die Wahrscheinlichkeit, dass x, y, z beziehungsweise zwischen den Grenzen x und $x + dx$, y und $y + dy$, z und $z + dz$ liegen, ergibt sich ein Ausdruck von der Form

$$p = \frac{G}{(\sqrt{\pi})^3} e^{-(a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy)} dx\, dy\, dz, \tag{21}$$

in welchem nun die Konstanten zu bestimmen sind.

Zunächst muss dieser Ausdruck, in Bezug auf alle drei Variablen zwischen den Grenzen $-\infty$ und ∞ integriert, die Einheit ergeben, weil die Fehler x, y, z zwischen diesen Grenzen notwendig liegen müssen. Ist

$$R = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad (a_{ij} = a_{ji}) \tag{22}$$

die Determinante der quadratischen Form im Exponenten von e, so hat man, diese Form vorübergehend mit u bezeichnet, nach Gleichung (11), Art. 118,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u}\, dx\, dy\, dz = \frac{(\sqrt{\pi})^3}{\sqrt{R}},$$

folglich

$$G^2 = R. \tag{23}$$

Es sei ferner

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \left[\frac{aa}{hh}\right], & \alpha_{12} &= \left[\frac{ab}{hh}\right], & \alpha_{13} &= \left[\frac{ac}{hh}\right] \\ \alpha_{21} &= \alpha_{12}, & \alpha_{22} &= \left[\frac{bb}{hh}\right], & \alpha_{23} &= \left[\frac{bc}{hh}\right] \\ \alpha_{31} &= \alpha_{13}, & \alpha_{32} &= \alpha_{23}, & \alpha_{33} &= \left[\frac{cc}{hh}\right]. \end{aligned} \tag{24}$$

Integriert man den Ausdruck (21) in Bezug auf eine der drei Variabeln, z. B. in Bezug auf x, zwischen den Grenzen $-\infty$ und ∞, so entsteht

$$p_x = \frac{G}{\pi\sqrt{a_{11}}} e^{-\left(\frac{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}{a_{11}}y^2+2\frac{a_{11}a_{23}-a_{12}a_{13}}{a_{11}}yz+\frac{a_{11}a_{33}-a_{13}^2}{a_{11}}z^2\right)} dy\,dz,$$

und der Fall erscheint zurückgeführt auf die Bestimmung eines Punktes in der YZ-Ebene. Mithin ist nach den im vorigen Artikel gefundenen Resultaten (13) und (13*) und mit dort gebrauchten Bezeichnungen

$$\frac{G}{\sqrt{a_{11}}} = K; \quad K^2\alpha_{22} = \frac{a_{11}a_{33}-a_{13}^2}{a_{11}}, \quad K^2\alpha_{33} = \frac{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}{a_{11}},$$

$$K^2\alpha_{23} = \frac{a_{12}a_{13}-a_{11}a_{23}}{a_{11}}.$$

Ähnliche Gleichungen erhält man, wenn man die Integration in Bezug auf y und in Bezug auf z ausführt. Im Ganzen ergibt sich das Gleichungssystem

$$(25)\quad \begin{aligned} &\alpha_{11} = \frac{a_{22}a_{33}-a_{23}^2}{G^2}, && \alpha_{12} = \frac{a_{31}a_{32}-a_{33}a_{12}}{G^2}, && \alpha_{13} = \frac{a_{21}a_{23}-a_{22}a_{13}}{G^2} \\ &\alpha_{21} = \alpha_{12}, && \alpha_{22} = \frac{a_{33}a_{11}-a_{31}^2}{G^2}, && \alpha_{23} = \frac{a_{12}a_{13}-a_{11}a_{23}}{G^2} \\ &\alpha_{31} = \alpha_{13}, && \alpha_{32} = \alpha_{23}, && \alpha_{33} = \frac{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}{a_{11}}. \end{aligned}$$

Es ist aber der Zähler von α_{11} die dem Element a_{11} adjungierte Subdeterminante von R, ebenso der Zähler von α_{12} die dem Element a_{12} adjungierte Subdeterminante u. s. f. Demnach ist

$$G^6 \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = R^2$$

und mit Bezug auf (23)

$$(26)\qquad \frac{1}{G^2} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix};$$

ferner hat man*)

$$a_{11} = \frac{G^4(\alpha_{22}\alpha_{33} - \alpha_{23}^2)}{R} = G^2(\alpha_{22}\alpha_{33} - \alpha_{23}^2), \text{ u. s. f.,}$$

so dass sich schliesslich neben (26) folgende Bestimmung der Konstanten ergibt

$$
\begin{array}{lll}
 & a_{11} = G^2(\alpha_{22}\alpha_{33} - \alpha_{23}^2), & a_{12} = G^2(\alpha_{31}\alpha_{32} - \alpha_{33}\alpha_{12}), \\
 & & a_{13} = G^2(\alpha_{21}\alpha_{23} - \alpha_{22}\alpha_{13}) \\
(27) & a_{21} = a_{12}, & a_{22} = G^2(\alpha_{33}\alpha_{11} - \alpha_{31}^2), \\
 & & a_{23} = G^2(\alpha_{12}\alpha_{13} - \alpha_{11}\alpha_{23}) \\
 & a_{31} = a_{13}, & a_{32} = a_{23}, \\
 & & a_{33} = G^2(\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2).
\end{array}
$$

Man kann indessen diesen Resultaten noch eine andere bemerkenswerte Gestalt geben, indem man sich ähnlicher Umformungen bedient wie in Art. 146. Zunächst ist

$$
\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix} \left[\frac{aa}{hh}\right] & \left[\frac{ab}{hh}\right] & \left[\frac{ac}{hh}\right] \\ \left[\frac{ba}{hh}\right] & \left[\frac{bb}{hh}\right] & \left[\frac{bc}{hh}\right] \\ \left[\frac{ca}{hh}\right] & \left[\frac{cb}{hh}\right] & \left[\frac{cc}{hh}\right] \end{vmatrix}
$$

$$= \sum \left(\frac{a_i}{h_i}\frac{b_j}{h_j}\frac{c_k}{h_k}\right)^2 = \sum \frac{(a_i\, b_j\, c_k)^2}{h_i^2 h_j^2 h_k^2},$$

die Summierung über alle Kombinationen der Zeiger $1, 2, \dots n$ zu dreien ausgedehnt; ferner ist

$$\alpha_{22}\alpha_{33} - \alpha_{23}^2 = \begin{vmatrix} \left[\frac{bb}{hh}\right] & \left[\frac{bc}{hh}\right] \\ \left[\frac{cb}{hh}\right] & \left[\frac{cc}{hh}\right] \end{vmatrix} = \sum \frac{(b_i\, c_j)^2}{h_i^2 h_j^2},$$

$$\alpha_{31}\alpha_{32} - \alpha_{33}\alpha_{12} = \begin{vmatrix} \left[\frac{bc}{hh}\right] & \left[\frac{ba}{hh}\right] \\ \left[\frac{cc}{hh}\right] & \left[\frac{ca}{hh}\right] \end{vmatrix} = \sum \frac{(b_i\, c_j)(c_i\, a_j)}{h_i^2 h_j^2}, \text{ u. s. f.,}$$

die Summierung über alle Kombinationen der Zeiger $1, 2, \dots n$ zu zweien erstreckt; man hat also

*) Baltzer, Det., 5. Aufl., pag. 63.

$$\frac{1}{G^2} = \sum \frac{(a_i\, b_j\, c_k)^2}{h_i^2\, h_j^2\, h_k^2}$$

$$(28)\qquad a_{11} = \frac{\sum \frac{(b_i\, c_j)^2}{h_i^2\, h_j^2}}{\sum \frac{(a_i\, b_j\, c_k)^2}{h_i^2\, h_j^2\, h_k^2}}, \qquad a_{12} = \frac{\sum \frac{(b_i\, c_j)\,(c_i\, a_j)}{h_i^2\, h_j^2}}{\sum \frac{(a_i\, b_j\, c_k)^2}{h_i^2\, h_j^2\, h_k^2}},$$

$$a_{13} = \frac{\sum \frac{(b_i\, c_j)\,(a_i\, b_j)}{h_i^2\, h_j^2}}{\sum \frac{(a_i\, b_j\, c_k^2)}{h_i^2\, h_j^2\, h_k^2}},$$

$$a_{21} = a_{12}, \qquad a_{22} = \frac{\sum \frac{(c_i\, a_j)^2}{h_i^2\, h_j^2}}{\sum \frac{(a_i\, b_j\, c_k)^2}{h_i^2\, h_j^2\, h_k^2}},$$

$$a_{23} = \frac{\sum \frac{(c_i\, a_j)\,(a_i\, b_j)}{h_i^2\, h_j^2}}{\sum \frac{(a_i\, b_j\, c_k)^2}{h_i^2\, h_j^2\, h_k^2}},$$

$$a_{31} = a_{13}, \qquad a_{32} = a_{23},$$

$$a_{33} = \frac{\sum \frac{(a_i\, b_j)^2}{h_i^2\, h_j^2}}{\sum \frac{(a_i\, b_j\, c_k)^2}{h_i^2\, h_j^2\, h_k^2}}.$$

Das wesentliche Resultat der Untersuchung besteht nun in Folgendem: Alle Wertverbindungen x, y, z, welche der Gleichung

$$(29)\quad a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy = \text{const.}$$

genügen, haben dieselbe Wahrscheinlichkeit. Nun aber stellt diese Gleichung vermöge der Beschaffenheit ihrer Koeffizienten ein Ellipsoid, beziehungsweise ein System von Ellipsoiden dar, wenn man der const. nach und nach verschiedene Werte beilegt. Es ordnen sich also Punkte gleicher Wahrscheinlichkeit nach konzentrischen, ähnlichen und ähnlich liegenden Ellipsoiden um den Punkt X_0, Y_0, Z_0 als gemeinsamen Mittelpunkt.

159. Von einem anderen Gesichtspunkte und wesentlich allgemeineren Voraussetzungen geht die folgende Untersuchung aus, welche hier nur für den Fall eines Punktes im Raume geführt wird, weil die auf einen Punkt in der Ebene bezüglichen Resultate sich aus den gefundenen leicht ableiten lassen. Der Grundgedanke ist in der Auffassung enthalten, welche Bienaymé*) den Resultaten der Methode der kleinsten Quadrate unterlegen wollte und die darin besteht, dass nicht nach der Wahrscheinlichkeit vorgegebener Grenzen für den Fehler eines einzelnen Elementes, sondern nach der Wahrscheinlichkeit des gleichzeitigen Eintreffens gegebener Grenzen für die Fehler aller Elemente gefragt wird, und nach dieser zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit soll der Wert des Ausgleichungsresultates beurteilt werden. Wenn die Elemente die Koordinaten eines Punktes in der Ebene oder im Raume bedeuten, dann ist diese Auffassung wohlbegründet in der Zusammengehörigkeit dieser Grössen: erst aus den Fehlern beider, beziehungsweise aller drei Koordinaten und der Wahrscheinlichkeit ihres Zusammentreffens gewinnt man eine Vorstellung von der Genauigkeit der Punktbestimmung.

Die Analyse jedoch, welcher wir folgen werden, ist verschieden von jener Bienaymé's; sie schliesst sich an die in Art. 119 entwickelte Analyse Todhunter's an.

Ein Punkt im Raume sei als Durchschnitt einer sehr grossen Anzahl n von geometrischen Örtern — Flächen — bestimmt, deren jeder von beobachteten Grössen abhängig und daher Fehlern unterworfen ist. Kennt man Näherungswerte der auf ein orthogonales System bezogenen Koordinaten des Punktes und darf man die an denselben anzubringenden Korrektionen X, Y, Z — d. i. die relativen Koordinaten des wahren Punktes in Bezug auf den durch die Näherungswerte bestimmten — als so klein voraussetzen, dass Potenzen und Produkte dieser Grössen den ersten Potenzen gegenüber vernachlässigt werden dürfen, so lässt sich jeder der geometri-

*) Sur la probabilité des erreurs d'après la méthode des moindres carrés. Journ. Liouville, sér. I, XVIII, pag. 33—78. — Vgl. d. Verf. „Zur Theorie der Fehlerellipse", Sitzber. der Wiener Ak., Bd. 82, 2. Abt.

schen Örter in der Umgebung des genäherten Punktes durch eine Ebene ersetzen, so dass man zur Bestimmung von X, Y, Z n Gleichungen der Form

$$\varepsilon_i = -l_i + a_i X + b_i Y + c_i Z \quad (i = 1, 2, \cdots n) \tag{1}$$

hat, worin a_i, b_i, c_i gegebene von Fehlern freie Grössen, l_i aber eine von der Beobachtung abhängige Grösse und ε_i ihren Fehler bedeuten soll; damit ist geometrisch der Sachverhalt ausgesprochen, dass die Stellung jeder der n Ebenen als feststehend und fehlerfrei, dagegen ihre Lage im Raume als fehlerhaft betrachtet wird. Eine Voraussetzung über das Gesetz, welchem die einzelnen ε_i unterworfen sind, soll nicht gemacht werden; zur Vereinfachung der Analyse wird angenommen, dass es unabhängig sei von dem Zeiger i.

Um Werte für X, Y, Z abzuleiten, multipliziere man jede der Gleichungen (1) mit einer Zahl α_i und bilde die Summe, verfahre dann ebenso mit einem zweiten und einem dritten System von Zahlen β_i und γ_i. Wenn man diese Zahlen den zu ihrer Bestimmung nicht ausreichenden Bedingungen

$$\begin{array}{lll} [\alpha a] = 1, & [\alpha b] = 0, & [\alpha c] = 0 \\ [\beta a] = 0, & [\beta b] = 1, & [\beta c] = 0 \\ [\gamma a] = 0, & [\gamma b] = 0, & [\gamma c] = 1 \end{array} \tag{2}$$

unterwirft, so kommt man zu den Bestimmungen

$$\begin{aligned} X &= [\alpha l] + [\alpha \varepsilon] \\ Y &= [\beta l] + [\beta \varepsilon] \\ Z &= [\gamma l] + [\gamma \varepsilon], \end{aligned} \tag{3}$$

welche die unbekannten Fehler ε enthalten. Wählt man statt der verschiedenen ε ihren gemeinsamen Mittelwert

$$k' = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon \varphi(\varepsilon) d\varepsilon$$

und setzt demgemäss

$$\begin{aligned} X_0 &= [\alpha l] + [\alpha] k' \\ Y_0 &= [\beta l] + [\beta] k' \\ Z_0 &= [\gamma l] + [\gamma] k', \end{aligned} \tag{4}$$

so hat diese Annahme die Fehler

$$
(5)\qquad \begin{aligned}
x &= X - X_0 = [\alpha\varepsilon] - [\alpha]k' \\
y &= Y - Y_0 = [\beta\varepsilon] - [\beta]k' \\
z &= Z - Z_0 = [\gamma\varepsilon] - [\gamma]k'
\end{aligned}
$$

zur Folge, und nach der in Art. 119 gegebenen Entwicklung ist

$$
(6)\qquad p = \frac{\Delta}{8\pi^{\frac{3}{2}}\sqrt{R}}\, e^{-\frac{v}{4}}\, dx\, dy\, dz
$$

die Wahrscheinlichkeit, dass gleichzeitig x, y, z zwischen den Grenzen x und $x + dx$, y und $y + dy$, z und $z + dz$ enthalten sind. In diesem Ausdrucke bedeutet:

Δ die Determinante

$$
\begin{vmatrix}
[\alpha a] & [\alpha b] & [\alpha c] \\
[\beta a] & [\beta b] & [\beta c] \\
[\gamma a] & [\gamma b] & [\gamma c]
\end{vmatrix},
$$

welche wegen (2) im vorliegenden Falle den Wert 1 hat;

R die Determinante des Grössensystems

$$
(7)\qquad \begin{aligned}
A_{11} &= [\alpha\alpha]\chi^2, & A_{12} &= [\alpha\beta]\chi^2, & A_{13} &= [\alpha\gamma]\chi^2, \\
A_{21} &= A_{12}, & A_{22} &= [\beta\beta]\chi^2, & A_{23} &= [\beta\gamma]\chi^2, \\
A_{31} &= A_{13}, & A_{32} &= A_{23}, & A_{33} &= [\gamma\gamma]\chi^2,
\end{aligned}
$$

wobei $\chi^2 = \frac{1}{2}(k'' - k'^2)$ und k'' der Mittelwert von ε^2 ist;

endlich v jene quadratische Form von x, y, z, welche aus

$$
A_{11}\zeta_1^2 + A_{22}\zeta_2^2 + A_{33}\zeta_3^2 + 2A_{23}\zeta_2\zeta_3 + 2A_{31}\zeta_3\zeta_1 + 2A_{12}\zeta_1\zeta_2
$$

hervorgeht durch die Substitution (s. die Gleichungen (14) und (17), Art. 119 und die Gleichungen (2) dieses Artikels)

$$
\begin{aligned}
x &= A_{11}\zeta_1 + A_{12}\zeta_2 + A_{13}\zeta_3 \\
y &= A_{21}\zeta_1 + A_{22}\zeta_2 + A_{23}\zeta_3 \\
z &= A_{31}\zeta_1 + A_{32}\zeta_2 + A_{33}\zeta_3.
\end{aligned}
$$

Bezeichnet man das System der Adjunkten zu den Elementen der Determinante R mit

$$
\begin{matrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33},
\end{matrix}
\qquad (a_{12} = a_{21}, \cdots)
$$

so folgt aus den letztangeschriebenen Gleichungen

$$R\zeta_1 = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z,$$
$$R\zeta_2 = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z,$$
$$R\zeta_3 = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z,$$

und die obige quadratische Form verwandelt sich in

$$\frac{1}{R}(a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy),$$

so dass also mit Benutzung dieser Zwischenresultate

$$(8)\quad p = \frac{1}{8\pi^{\frac{3}{2}}\sqrt{R}}\, e^{-\frac{a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy}{4R}}\, dxdydz.$$

Nun behält p denselben Wert bei für alle Wertverbindungen von x, y, z, für welche

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy = \text{const.};$$

diese Gleichung stellt ein Ellipsoid oder ein System von Ellipsoiden dar. Wir sind damit wieder bei dem Resultate des Artikels 158 angelangt.

Dieses Ergebnis ist zu Stande gekommen ohne Rücksicht darauf, wie man die Multiplikatoren α_i, β_i, γ_i wählt. Es wird Gegenstand einer späteren Untersuchung sein (s. Art. 191), diese Wahl möglichst günstig zu treffen.

Von der geometrischen Anschauung, welche den Ausgangspunkt für die vorstehende Untersuchung bildet, sind auch Andrae*) und Helmert**) bei ihren von früheren Arbeiten unabhängigen Untersuchungen über die Genauigkeit der Bestimmung eines Punktes in der Ebene ausgegangen: Der Punkt erscheint als der gemeinsame von zwei oder mehreren Geraden. Es wird jedoch von Anfang an die Voraussetzung gemacht, dass der einzelne Beobachtungsfehler dem Gauss'schen Gesetze folge.

160. Eine eigentliche Theorie der Fehler in der Ebene und im Raume hat Schols***) begründet. Man kann seine

---

*) Astron. Nachr., Bd. 47, Nr. 1117.

**) Studien über rationelle Vermessungen im Gebiete der höheren Geodäsie, Schlömich Zeitschr., XIII, pag. 73 ff.

***) Théorie des erreurs dans le plan et dans l'espace. Annal. de l'École Polytechn. de Delft, II, pag. 123 flg. Ursprünglich in hollän-

diesbezüglichen Untersuchungen füglich in zwei Teile trennen; der eine enthält rein geometrische, d. h. solche Resultate, welche unabhängig sind von dem Gesetz, nach welchem die Fehler wirken; der andere gibt jene Resultate, welche aus dem Grenzgesetz der Fehler fliessen; so nennt Schols dasjenige Gesetz, welchem ein Fehler in der Ebene oder im Raume folgt, wenn er als Ergebnis des Zusammenwirkens einer sehr grossen Anzahl eben solcher Fehler betrachtet werden kann.

Bei der Entwicklung der wesentlichen Resultate dieser Theorie, welche den Inhalt der folgenden Artikel bildet, ist im Interesse einer einheitlichen Darstellung von Schols' Bezeichnungen mehrfach abgewichen worden.

161. Ein Fehler in der Ebene und im Raume ist geometrisch dargestellt durch die Verbindungslinie des beobachteten Punktes mit dem wahren Punkte. Zu seiner analytischen Festlegung sind im ersten Falle zwei, im zweiten Falle drei unabhängige Grössen erforderlich. Als solche mögen, indem der wahre Punkt, zugleich der gemeinsame Anfangspunkt aller Fehler, als Ursprung eines rechtwinkligen Coordinatensystems gewählt wird, entweder die Länge der Verbindungslinie und ein, respektive zwei Richtungswinkel, oder die Coordinaten des Endpunktes gelten. Hiernach ist ein Fehler in der Ebene charakterisiert durch

$$\varrho,\ \varphi \quad \text{oder} \quad x,\ y,$$

ein Fehler im Raume durch

$$\varrho,\ \varphi,\ \Theta \quad \text{oder} \quad x,\ y,\ z.$$

Die Buchstaben ϱ, φ, Θ haben die üblichen Bedeutungen*).

Das Gesetz des Fehlers werde allgemein mit Φ bezeichnet in dem Sinne, dass das Produkt Φdu, respektive Φdv die Wahrscheinlichkeit ausdrückt, der Endpunkt des Fehlers liege in dem Element du der Ebene, beziehungsweise in dem Element dv des Raumes. Im ersten Falle ist Φ eine

discher Sprache erschienen in den Verhandlungen der königl. Akad. d. Wissensch. zu Amsterdam, XV.

*) Daraus, dass φ bisher zur Bezeichnung des Wirkungsgesetzes eines linearen Fehlers ausschliesslich gebraucht wurde, kann hier keine Unzukömmlichkeit entstehen.

Funktion von ϱ, φ oder x, y, im zweiten Falle eine Funktion von ϱ, φ, Θ oder x, y, z. Es ist also

$$\Phi dx dy, \quad \Phi dx dy dz$$

die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers in dem Flächen-(Raum-) Element $dxdy$ ($dxdydz$) am Punkte x, y (x, y, z);

$$\Phi \varrho d\varrho d\varphi, \quad \Phi \varrho^2 \sin \Theta \, d\varrho d\varphi d\Theta$$

die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers in dem Flächen-(Raum-) Element $\varrho d\varrho d\varphi$ ($\varrho^2 \sin \Theta \, d\varrho d\varphi d\Theta$) am Punkte ϱ, φ (ϱ, φ, Θ).

Hieraus geht unmittelbar hervor, dass

$$(1) \qquad \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi dx dy = \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} \Phi \varrho d\varrho d\varphi = 1$$

für Fehler in der Ebene und

$$(2) \qquad \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi dx dy dz = \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \Phi \varrho^2 \sin \Theta \, d\varrho d\varphi d\Theta = 1$$

für Fehler im Raume.

Bei der in Art. 154 berührten Anschauungsweise, wo Φ die Dichte einer ideellen Materie bedeutet, stellen diese Integrale die Masse des ganzen Wahrscheinlichkeitskörpers vor.

Den angeschriebenen Gleichungen liegt die Annahme zu Grunde, dass entweder Fehler aller Grössen und Richtungen möglich sind, oder dass die Funktion Φ, falls das Fehlergebiet ein begrenztes sein sollte, diese Grenzen explicit enthält, so dass sie ausserhalb derselben verschwindet.

162. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler unabhängig von der Richtung den Betrag ϱ nicht unter- und $\varrho + d\varrho$ nicht überschreite, kommt der Masse eines Kreisringes, respektive einer Kugelschale gleich, welche mit den Halbmessern ϱ und $\varrho + d\varrho$ um den Ursprung beschrieben wird, und ist für Fehler in der Ebene durch das Produkt aus

$$(3) \qquad \Phi_\varrho = \varrho \int_0^{2\pi} \Phi d\varphi,$$

für Fehler im Raume durch das Produkt aus

$$(4) \qquad \Phi_\varrho = \varrho^2 \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \Phi \sin \Theta \, d\varphi d\Theta$$

mit $d\varrho$ ausgedrückt.

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler unabhängig von seiner Grösse eine bestimmte Richtung aufweise, kommt der Masse eines vom Ursprung als Spitze bis an die Grenze des Wahrscheinlichkeitskörpers reichenden Winkels, respektive Kegels von unendlich kleiner Öffnung gleich und ist für einen Fehler in der Ebene proportional

$$(5) \qquad \Phi_\varphi = \int_0^\infty \Phi \varrho d\varrho ,$$

für einen Fehler im Raume proportional

$$(6) \qquad \Phi_{\varphi,\Theta} = \sin \Theta \int_0^\infty \Phi \varrho^2 d\varrho .$$

163. Um die Fehler in der Ebene und im Raume auf lineare Fehler zurückzuführen, projiciere man jeden der beobachteten Punkte auf eine der Coordinatenaxen, z. B. auf die X-Axe. Der Fehler dieser Projektion, zugleich die Projektion des ursprünglichen Fehlers auf der betreffenden Axe, befolgt ein Gesetz, das sich aus Φ leicht gewinnen lässt. Die Gesamtheit der Punkte, deren Projektion in das Element x bis $x + dx$ der X-Axe fällt, erfüllt in der Ebene einen durch zwei zur X-Axe senkrechte Gerade begrenzten Streifen, im Raume eine durch zwei zu derselben Axe senkrechte Ebenen begrenzte Schicht; es ist somit die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler in Projektion auf die X-Axe zwischen x und $x + dx$ falle, in der Ebene durch

$$(7) \qquad \Phi_x = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi dy ,$$

im Raume durch

$$(8) \qquad \Phi_x = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi dy dz ,$$

jedesmal mit dx multipliziert, gegeben. Ähnliche Ausdrücke

können für die Projektionen des Fehlers auf die andere, beziehungsweise die beiden andern Axen aufgestellt werden.

164. Das mittlere Quadrat eines Fehlers in der Ebene ist

$$
(9) \quad \begin{aligned}
K'' &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x^2+y^2)\,\Phi\,dx\,dy \\
&= \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\varrho^3\,\Phi\,d\varrho\,d\varphi = \int_0^{\infty}\varrho^2\,\Phi_\varrho\,d\varrho
\end{aligned}
$$

und das eines Fehlers im Raume

$$
(10) \quad \begin{aligned}
K'' &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x^2+y^2+z^2)\,\Phi\,dx\,dy\,dz \\
&= \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\varrho^4\,\Phi\sin\Theta\,d\varrho\,d\varphi\,d\Theta = \int_0^{\infty}\varrho^2\,\Phi_\varrho\,d\varrho;
\end{aligned}
$$

sein Ausdruck stimmt überein mit demjenigen für das polare Trägheitsmoment des Wahrscheinlichkeitskörpers in Bezug auf den Ursprung.

Das mittlere Quadrat des Fehlers in Projektion auf die X-Axe hingegen ist

$$
K_x'' = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\,\Phi_x\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^2\,\Phi\,dx\,dy
$$

beziehungsweise

$$
K_x'' = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\,\Phi_x\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^2\,\Phi\,dx\,dy\,dz
$$

und bedeutet zugleich das Trägheitsmoment des Wahrscheinlichkeitskörpers im ersten Falle bezüglich der Y-Axe, im zweiten Falle bezüglich der YZ-Ebene.

Stellt man auch die entsprechenden Ausdrücke für die andern Fehlerprojektionen auf und vergleicht mit (9) und (10), so ergibt sich für Fehler in der Ebene

$$
(11) \qquad K'' = K_x'' + K_y'',
$$

für Fehler im Raume

$$
(12) \qquad K'' = K_x'' + K_y'' + K_z''.
$$

Diese beiden Gleichungen drücken bekannte Eigenschaften der Trägheitsmomente aus und man kann, vermöge der zwischen den mittleren Fehlerquadraten einerseits und den Trägheitsmomenten andererseits bestehenden Analogie, auch andere Eigenschaften der letzteren auf die ersteren übertragen.

Sowie es in der Ebene zwei und im Raume drei zu einander normale Hauptaxen der Trägheit gibt, so treten auch bei Fehlern in der Ebene und im Raume zwei, beziehungsweise drei zu einander senkrechte Richtungen auf, welche eine ähnlich wichtige Rolle spielen und als Hauptaxen der Wahrscheinlichkeit bezeichnet werden mögen. Ihre Existenz ist ebenso unabhängig von dem Fehlergesetz, wie die Existenz der Trägheitshauptaxen unabhängig ist von der Form und den Massenverhältnissen des Körpers.

Wählt man die Hauptaxen der Wahrscheinlichkeit zu Koordinatenaxen, so verschwindet bei Fehlern in der Ebene das Integral

$$K''_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\Phi dx dy,$$

bei Fehlern im Raume das Integral

$$K''_{yz} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} yz\Phi dx dy dz,$$

nebst den beiden analogen K''_{zx}, K''_{xy}. Es sind demnach die Gleichungen

$$K''_{xy} = 0$$

beziehungsweise

$$K''_{yz} = 0, \quad K''_{zx} = 0, \quad K''_{xy} = 0$$

das Merkmal für die Hauptaxen der Wahrscheinlichkeit.

165. Es soll nun erörtert werden, wie man aus den mittleren Quadraten der Fehlerprojektionen auf die Hauptaxen das mittlere Quadrat der Projektion auf eine beliebige Axe, und wie man aus den auf irgend ein rechtwinkliges Axensystem bezogenen Werten K''_x, K''_y, K''_{xy}, respektive K''_x, K''_y, K''_z, K''_{yz}, K''_{zx}, K''_{xy} die Hauptaxen und die auf sie bezogenen mittleren Quadrate ableiten kann.

Um das mittlere Quadrat für eine Axe durch den Fehlerursprung zu finden, welche mit der Hauptaxe OX den Winkel ϑ bildet, projiziere man den beliebigen Fehler x, y auf diese Axe; die Projektion kommt gleich

$$x \cos \vartheta + y \sin \vartheta,$$

ihr mittleres Quadrat also

$$(13) \qquad \begin{aligned} K''_\vartheta &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x \cos \vartheta + y \sin \vartheta)^2 \, \Phi dx dy \\ &= K''_x \cos^2 \vartheta + K''_y \sin^2 \vartheta, \end{aligned}$$

weil $K''_{xy} = 0$ ist.

Wenn hingegen die auf ein beliebiges rechtwinkliges System bezogenen Werte K''_x, K''_y, K''_{xy} gegeben sind, so tritt bei dem Übergange zu einem neuen Coordinatensystem $X_1 O Y_1$, wenn $\sphericalangle XOX_1 = \psi$ ist, an die Stelle von x, y im neuen System beziehungsweise

$$\begin{aligned} x_1 &= x \cos \psi + y \sin \psi \\ y_1 &= - y \sin \psi + y \cos \psi, \end{aligned}$$

und damit die neuen Axen Hauptaxen seien, muss

$$K''_{x_1 y_1} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x \cos \psi + y \sin \psi)(-x \sin \psi + y \cos \psi) \, \Phi dx dy = 0$$

werden; d. h.

$$(-K''_x + K''_y) \cos \psi \sin \psi + K''_{xy}(\cos^2 \psi - \sin^2 \psi) = 0,$$

woraus

$$(14) \qquad \operatorname{tg} 2\psi = \frac{2K''_{xy}}{K''_x - K''_y};$$

ferner ergibt sich leicht

$$(15) \qquad \begin{aligned} K''_{x_1} &= K''_x \cos^2 \psi + K''_y \sin^2 \psi + 2K''_{xy} \cos \psi \sin \psi \\ K''_{y_1} &= K''_x \sin^2 \psi + K''_y \cos^2 \psi - 2K''_{xy} \cos \psi \sin \psi. \end{aligned}$$

Die Projektion des räumlichen Fehlers x, y, z auf eine Gerade mit den Richtungswinkeln α, β, γ ist gegeben durch

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma,$$

mithin ist, wenn die zu Grunde liegenden Axen Hauptaxen sind,

$$(16) \qquad K''_{\alpha\beta\gamma} = K''_x \cos^2 \alpha + K''_y \cos^2 \beta + K''_z \cos^2 \gamma.$$

Geht man von einem beliebigen rechtwinkligen Axensystem zu einem andern über, dessen Axen die Richtungscosinus a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2; a_3, b_3, c_3 haben, so sind

$$x_1 = a_1 x + b_1 y + c_1 z, \quad y_1 = a_2 x + b_2 y + c_2 z,$$
$$z_1 = a_3 x + b_3 y + c_3 z$$

die Projektionen des Fehlers x, y, z auf die neuen Axen; sollen diese Hauptaxen sein, so muss $K''_{y_1 z_1}$, $K''_{z_1 x_1}$ und $K''_{x_1 y_1}$ verschwinden; d. h. es muss

$$(17) \quad \begin{aligned} & a_2 a_3 K''_x + b_2 b_3 K''_y + c_2 c_3 K''_z \\ & + (b_2 c_3 + b_3 c_2) K''_{yz} + (c_2 a_3 + c_3 a_2) K''_{zx} + (a_2 b_3 + a_3 b_2) K''_{xy} = 0 \\ & a_3 a_1 K''_x + b_3 b_1 K''_y + c_3 c_1 K''_z \\ & + (b_3 c_1 + b_1 c_3) K''_{yz} + (c_3 a_1 + c_1 a_3) K''_{zx} + (a_3 b_1 + a_1 b_3) K''_{xy} = 0 \\ & a_1 a_2 K''_x + b_1 b_2 K''_y + c_1 c_2 K''_z \\ & + (b_1 c_2 + b_2 c_1) K''_{yz} + (c_1 a_2 + c_2 a_1) K''_{zx} + (a_1 b_2 + a_2 b_1) K''_{xy} = 0 \end{aligned}$$

werden; diese Gleichungen in Verbindung mit den sechs Gleichungen, welche zwischen den neun Richtungscosinus aus geometrischen Gründen bestehen, reichen zur Bestimmung derselben aus. Ist diese Bestimmung erfolgt, so findet man leicht

$$(18) \quad \begin{aligned} K''_{x_1} &= a_1^2 K''_x + b_1^2 K''_y + c_1^2 K''_z \\ & + 2 b_1 c_1 K''_{yz} + 2 c_1 a_1 K''_{zx} + 2 a_1 b_1 K''_{xy} \\ K''_{y_1} &= a_2^2 K''_x + b_2^2 K''_y + c_2^2 K''_z \\ & + 2 b_2 c_2 K''_{yz} + 2 c_2 a_2 K''_{zx} + 2 a_2 b_2 K''_{xy} \\ K''_{z_1} &= a_3^2 K''_x + b_3^2 K''_y + c_3^2 K''_z \\ & + 2 b_3 c_3 K''_{yz} + 2 c_3 a_3 K''_{zx} + 2 a_3 b_3 K''_{xy}. \end{aligned}$$

166. Trägt man auf jeder durch den Fehlerursprung laufenden Geraden von diesem aus eine Strecke ϱ ab derart, dass die Coordinaten x, y, beziehungsweise x, y, z des Endpunktes, auf die Hauptaxen bezogen, der Gleichung

$$(19) \quad K''_x x^2 + K''_y y^2 = 1$$

für die Ebene, beziehungsweise

$$(20) \quad K''_x x^2 + K''_y y^2 + K''_z z^2 = 1$$

für den Raum genügen, so folgt aus (13), respektive (16), dass

(21) $$K''_\vartheta = \frac{1}{\varrho^2}$$

(22) $$K''_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{\varrho^2}.$$

Die Gleichung (19) stellt eine Ellipse, die Gleichung (20) ein Ellipsoid mit den Hauptaxen der Wahrscheinlichkeit als Axen dar. Es sind demnach die mittleren Quadrate der Projektionen des Fehlers auf beliebige durch den Fehlerursprung gezogene Gerade durch die reciproken Quadrate der zugehörigen Radien einer gewissen Ellipse oder eines Ellipsoids dargestellt, für welche Gebilde sich die Bezeichnung Ellipse oder Ellipsoid der mittleren Fehler eignen würde. Man erkennt leicht den Zusammenhang, welcher zwischen der Ellipse der mittleren Fehler und der Centralellipse des Wahrscheinlichkeitskörpers (-Fläche) besteht. Da nämlich K''_ϑ das Trägheitsmoment in Bezug auf die zur Geraden ϑ senkrechte Axe vorstellt, so ist die Ellipse der mittleren Fehler die um 90^0 gedrehte Centralellipse. — Zwischen dem Ellipsoid der mittleren Fehler und dem Centralellipsoid findet eine ähnliche Beziehung nicht statt, wie man schon daraus erkennt, dass $K''_{\alpha\beta\gamma}$ nicht das Trägheitsmoment in Bezug auf eine Axe, sondern in Bezug auf die zur Geraden $\alpha\beta\gamma$ senkrechte Ebene durch den Fehlerursprung bedeutet.

167. Man denke sich ein beliebiges rechtwinkliges Axensystem, den Fehler auf die Axen desselben projiciert und bilde die Mittelwerte dieser Projektionen. Für die X-Axe und für Fehler in der Ebene ist dieser Mittelwert gleich

(23) $$K'_x = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x\Phi dx dy,$$

für Fehler im Raume

(24) $$K'_x = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x\Phi dx dy dz$$

und bedeutet, wenn man auf die Gleichungen (1) und (2), Art. 161, Rücksicht nimmt, die Abscisse des Schwerpunktes des Wahrscheinlichkeitskörpers.

Ist K_x' von Null verschieden, so drückt es den konstanten Anteil der Fehlerprojektion auf der X-Axe aus, ebenso K_y' für die Y-Axe und eventuell K_z' für die Z-Axe. Mit demselben Rechte hat man die Verbindungslinie des Fehlerursprungs mit dem Schwerpunkt K_x', K_y' (eventuell K_z') des Wahrscheinlichkeitskörpers als konstanten Anteil des Fehlers überhaupt aufzufassen, und bezeichnet man ihn mit K', so ist

$$K'^2 = K_x'^2 + K_y'^2 \tag{25}$$

beziehungsweise

$$K'^2 = K_x'^2 + K_y'^2 + K_z'^2. \tag{26}$$

Nach der Lage des Schwerpunktes des Wahrscheinlichkeitskörpers hat man zu unterscheiden:

1) Konstante Fehler, welche immer dieselbe Grösse und Richtung haben und deren Wahrscheinlichkeitskörper sich auf einen festen ausserhalb des Fehlerursprungs liegenden Punkt reduciert.

2) Zufällige Fehler, deren Wahrscheinlichkeitskörper seinen Schwerpunkt im Ursprung hat.

3) Gemischte Fehler, bei welchen der Schwerpunkt des Wahrscheinlichkeitskörpers ausserhalb des Ursprungs liegt.

168. Die Wirkung eines Fehlers besteht in einer Verschiebung des wahren Punktes von bestimmter Grösse und Richtung. Daraus folgt unmittelbar, dass Fehler, welche gleichzeitig einen Punkt beeinflussen, ebenso zusammengesetzt werden wie Kräfte, Geschwindigkeiten etc. Sind die Fehler unabhängig von einander, so ist die Wahrscheinlichkeit des zusammengesetzten Fehlers das Produkt aus den Wahrscheinlichkeiten der zusammensetzenden Fehler oder Componenten.

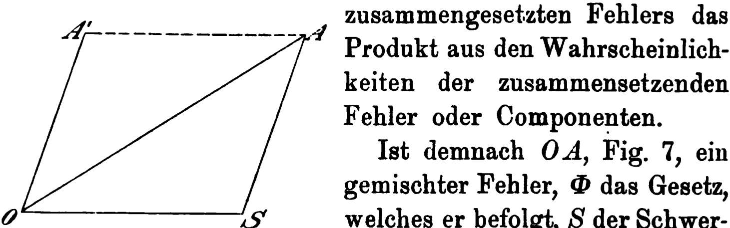


Fig. 7.

Ist demnach OA, Fig. 7, ein gemischter Fehler, Φ das Gesetz, welches er befolgt, S der Schwerpunkt seines Wahrscheinlichkeitskörpers, so kann OA als das Resultat des Zusammenwirkens des konstanten Fehlers OS und eines zufälligen Fehlers

$OA' = SA$ betrachtet werden, und da die Wahrscheinlichkeit des ersteren gleich ist der Einheit, so muss die Wahrscheinlichkeit von OA' notwendig dieselbe sein wie die von OA. Es hat demnach der zufällige Fehler OA' einen Wahrscheinlichkeitskörper, welcher jenem des gemischten Fehlers OA kongruent und derart parallel verschoben ist, dass der Schwerpunkt mit dem Fehlerursprung zusammenfällt. Durch diesen einfachen Vorgang ist der gemischte Fehler von seinem konstanten Anteil befreit und auf einen zufälligen zurückgeführt.

Wird ein Punkt von mehreren gemischten Fehlern beeinflusst, so denke man sich jeden derselben in seinen konstanten und zufälligen Anteil zerlegt: die Resultante aus den konstanten Anteilen gibt den konstanten Teil des Gesamtfehlers, ebenso wie die Resultante der zufälligen Anteile seinen zufälligen Teil ergibt. Es genügt, wenn dies für zwei Fehler nachgewiesen wird. Sind diese x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2, Φ_1 und Φ_2 die Gesetze ihrer Wirksamkeit, so ist nach dem Prinzip der Zusammensetzung $x_1 + x_2$ die Projektion des zusammengesetzten Fehlers x, y, z auf der X-Axe und ihr Mittelwert

$$\int_{(6)} (x_1 + x_2)\, \Phi_1 \Phi_2 dx_1 dy_1 dz_1\, dx_2 dy_2 dz_2,$$

die Integration in Bezug auf jede der Variabeln zwischen den Grenzen $-\infty$ und ∞ ausgedehnt. Das Integral zerfällt aber in die Summe

$$\int_{(3)} x_1 \Phi_1 dx_1 dy_1 dz_1 \int_{(3)} \Phi_2 dx_2 dy_2 dz_2$$
$$+ \int_{(3)} \Phi_1 dx_1 dy_1 dz_1 \int_{(3)} x_2 \Phi_2 dx_2 dy_2 dz_2,$$

welche mit Rücksicht auf die Gleichung (2), Art. 161 gleichkommt

$$\int_{3} x_1 \Phi_1 dx_1 dy_1 dz_1 + \int_{(3)} x_2 \Phi_2 dx_2 dy_2 dz_2;$$

dies ist aber die Summe der konstanten Teile der beiden komponierenden Fehler in ihren Projektionen auf der X-Axe.

Da ein Gleiches von den beiden andern Projektionen gilt, so ist damit in der That bewiesen, dass der konstante Teil des resultierenden Fehlers die Resultante aus den konstanten Anteilen der einzelnen Komponenten ist.

Man sieht zugleich, dass, sofern die beiden betrachteten Fehler zufällig sind, auch ihre Resultante den Charakter eines zufälligen Fehlers hat.

169. Für das mittlere Quadrat K_x'' der Projektion des resultierenden Fehlers auf der X-Axe hat man den Ausdruck

$$\int_{(6)} (x_1 + x_2)^2 \Phi_1 \Phi_2 dx_1 dy_1 dz_1 dx_2 dy_2 dz_2,$$

und dieser zerfällt, wenn man die Gleichung (2), Art. 161 beachtet, in die Summe

$$\int_{(3)} x_1^2 \Phi_1 dx_1 dy_1 dz_1 + \int_{(3)} x_2^2 \Phi_2 dx_2 dy_2 dz_2$$
$$+ 2 \int_{(3)} x_1 \Phi_1 dx_1 dy_1 dz_1 \int_{(3)} x_2 \Phi_2 dx_2 dy_2 dz_2,$$

d. h. es ist

$$(27) \quad \begin{aligned} K_x'' &= K_{x_1}'' + K_{x_2}'' + 2 K_{x_1}' K_{x_2}' \\ &= K_{x_1}'' + K_{x_2}'' + (K_{x_1}' + K_{x_2}')^2 - (K_{x_1}'^2 + K_{x_2}'^2). \end{aligned}$$

Dies kann auf eine beliebige Anzahl zusammenwirkender Fehler ausgedehnt werden und gibt, wenn man von dem Ergebnis des vorigen Artikels Gebrauch macht,

$$K_x'' - K_x'^2 = \sum K_{x_i}'' - \sum K_{x_i}'^2.$$

In gleicher Weise ist

$$K_y'' - K_y'^2 = \sum K_{y_i}'' - \sum K_{y_i}'^2$$
$$K_z'' - K_z'^2 = \sum K_{z_i}'' - \sum K_{z_i}'^2.$$

Durch Summierung erhält man vermöge (12), Art. 164, und (26), Art. 167

$$(28) \quad K'' - K'^2 = \sum K_i'' - \sum K_i'^2.$$

Hiernach ist das mittlere Quadrat des resultierenden Fehlers vermindert um das Quadrat seines konstanten An-

teils gleich der Summe der mittleren Quadrate der komponierenden Fehler vermindert um die Summe der Quadrate ihrer konstanten Anteile.

Ist x_1, y_1, z_1 zufällig, x_2, y_2, z_2 konstant, so wird $K'_{x_1} = 0$, $K''_{x_2} = K'^2_x$ und die Gleichung (27) reduziert sich auf

$$K''_x = K''_{x_1} + K'^2_x,$$

woraus

$$K''_{x_1} = K''_x - K'^2_x.$$

Schreibt man die analogen Gleichungen für die andern Projektionen an und bildet ihre Summe, so entsteht

$$K''_1 = K'' - K'^2. \tag{29}$$

Dies besagt, dass das mittlere Quadrat des von seinem konstanten Anteil befreiten Fehlers gleichkommt dem mittleren Quadrat des gemischten Fehlers vermindert um das Quadrat seines konstanten Anteils.

Mit Rücksicht auf dieses Ergebnis kann der Gleichung (28) auch die Fassung gegeben werden, dass das mittlere Quadrat der vom konstanten Anteil befreiten Resultante gleich ist der Summe der mittleren Quadrate der ebenso modifizierten Componenten.

170. Alle Ergebnisse, welche bisher abgeleitet worden sind, gelten ohne Rücksicht auf das Gesetz, welchem die Fehler folgen. Wir gehen nun dazu über, das Gesetz des Fehlers in der Ebene und im Raume aus seiner Entstehung und zwar unter der alleinigen Annahme abzuleiten, dass er das Resultat des Zusammenwirkens einer sehr grossen Anzahl derartiger Fehler sei. Dieses Gesetz bezeichnet Schols, wie schon einmal bemerkt worden, als das Grenzgesetz.

Wenn man die sämtlichen Fehler, als deren Resultante der betrachtete Fehler angesehen wird, auf eine durch den Fehlerursprung gehende Axe projiziert, so ist die Resultante dieser Projektionen die Projektion des Gesammtfehlers. Die Resultante einer sehr grossen Anzahl linearer Fehler, welche frei sind von konstanten Anteilen und in ihrem Grössenverhältnis gewissen Bedingungen genügen (s. Art. 38), folgt aber dem Gesetze

$$(30) \qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi K''}} e^{-\frac{x^2}{2K''}},$$

wobei K'' das mittlere Quadrat von x bedeutet.

Die Aufgabe besteht nun darin, ein solches Gesetz für den Fehler in der Ebene oder im Raume aufzufinden, dass sich aus demselben für die Projektion auf irgend eine Axe dasselbe Gesetz ergibt, wie es durch Zusammensetzung der betreffenden Projektionen der Einzelfehler erhalten wird. Jenes Gesetz ist dann das gesuchte Grenzgesetz.

Wir wählen zu Koordinatenaxen die Wahrscheinlichkeitshauptaxen des Gesamtfehlers. Jeder Einzelfehler werde zunächst auf diese Axen projiziert und nachdem man in jeder Axe die Resultante der Projektionen und ihr mittleres Quadrat gebildet, erhält man in den drei Grössen K_x'', K_y'', K_z'' zugleich die mittleren Quadrate der Projektionen des Gesamtfehlers.

Projiziert man sodann alle Einzelfehler auf eine durch den Fehlerursprung gehende Gerade mit den Richtungswinkeln α, β, γ, so ist das mittlere Quadrat der Resultante dieser Projektionen zugleich das der gleichnamigen Projektion des Gesamtfehlers, nach Gleichung (16), Art. 165,

$$K_x'' \cos^2\alpha + K_y'' \cos^2\beta + K_z'' \cos^2\gamma$$

und ihr Gesetz demnach vermöge (30)

$$\frac{e^{-\frac{u^2}{2(K_x''\cos^2\alpha + K_y''\cos^2\beta + K_z''\cos^2\gamma)}}}{\sqrt{2\pi(K_x''\cos^2\alpha + K_y''\cos^2\beta + K_z''\cos^2\gamma)}}.$$

Nach Gleichung (3), Art. 39, kann aber u als Resultante von drei unabhängigen in der Geraden $\alpha\beta\gamma$ wirkenden Fehlern aufgefasst werden, deren mittlere Fehlerquadrate

$$K_x'' \cos^2\alpha, \qquad K_y'' \cos^2\beta, \qquad K_z'' \cos^2\gamma$$

sind. Nun ist aber $K_x'' \cos^2\alpha$ das mittlere Quadrat der Projektion eines Fehlers, welcher mit der in Rede stehenden Geraden den Winkel α bildet und das mittlere Quadrat K_x'' hat. Unter den Geraden, welche mit $\alpha\beta\gamma$ den Winkel α bilden, befindet sich die X-Axe. Daher kann ein Fehler in der Geraden, welcher das mittlere Quadrat $K_x'' \cos^2\alpha$ hat,

als die Projektion eines Fehlers in der X-Axe angesehen werden, dessen mittleres Quadrat K_x'' ist.

Ähnliche Schlüsse gelten für die beiden andern Bestandteile. Daraus folgt, dass die Projektion des resultierenden Fehlers auf irgend einer Geraden demselben Gesetze folgt wie die Resultante der auf dieselbe Gerade bezogenen Projektionen dreier unabhängigen Fehler, welche längs der Hauptaxen wirken und die mittleren Quadrate K_x'', K_y'', K_z'' aufweisen.

Daraus ergibt sich der Satz:

Die Resultante einer sehr grossen Anzahl von Fehlern in der Ebene oder im Raume folgt demselben Gesetze wie die Resultante ihrer Projektionen auf den Hauptaxen der Wahrscheinlichkeit, diese Projektionen als unabhängig von einander betrachtet*).

Aus diesem Satze folgt aber das verlangte Grenzgesetz in einfacher Weise. Denn die Wahrscheinlichkeit, dass die Resultante der Projektionen der Einzelfehler auf der X-Axe zwischen x und $x + dx$ liege, ist

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi K_x''}} e^{-\frac{x^2}{2K_x''}} dx;$$

die Wahrscheinlichkeit, dass die Resultante der Projektionen auf der Y-Axe zwischen y und $y + dy$ falle, ist

*) Bei Bravais ist dieser Satz für Fehler in der Ebene ebenfalls schon ausgesprochen, l. c., pag. 279. — In der Schiesstechnik, welche, was die Treffwahrscheinlichkeit betrifft, auf der Theorie der Fehler in der Ebene beruht, wird bis in die jüngste Zeit angenommen, dass der einzelne Fehler als das Resultat des Zusammentreffens von zwei unabhängigen, in irgend zwei zu einander senkrechten Richtungen wirkenden Fehlern angesehen werden dürfe; bei vertikaler Zielfläche wählt man als solche Richtungen die Vertikale und die Horizontale durch den Zielpunkt. Der obige Satz zeigt, dass diese Anschauung im Allgemeinen nur in einem Falle richtig ist, wenn nämlich die genannten Richtungen mit den Hauptaxen der Wahrscheinlichkeit zusammenfallen. Ausser von Schols ist diese Thatsache in jüngster Zeit auch von anderer Seite erkannt und zu beweisen versucht worden, so von General Putz und Major Siacci. Vgl. Bertrand, Compt. rend., CVI, pag. 387 flg.

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi K_y''}} e^{-\frac{y^2}{2K_y''}} dy;$$

demnach die Wahrscheinlichkeit, dass diese Grenzen, als unabhängige Ereignisse aufgefasst, zugleich eingehalten werden,

$$\frac{e^{-\left(\frac{x^2}{2K_x''}+\frac{y^2}{2K_y''}\right)}}{\sqrt{2\pi K_x''}\sqrt{2\pi K_y''}} dx\,dy;$$

somit ist dem obigen Satze zufolge das Gesetz des Gesamtfehlers

$$\text{(31)} \qquad \Phi = \frac{e^{-\left(\frac{x^2}{2K_x''}+\frac{y^2}{2K_y''}\right)}}{\sqrt{2\pi K_x''}\sqrt{2\pi K_y''}}.$$

In gleicher Weise findet man für einen räumlichen Fehler

$$\text{(32)} \qquad \Phi = \frac{e^{-\left(\frac{x^2}{2K_x''}+\frac{y^2}{2K_y''}+\frac{z^2}{2K_z''}\right)}}{\sqrt{2\pi K_x''}\sqrt{2\pi K_y''}\sqrt{2\pi K_z''}}.$$

171. Die erste Ableitung des Gesetzes der linearen Fehler geschah auf Grund einer Hypothese über den wahrscheinlichsten Wert einer wiederholt mit gleicher Genauigkeit beobachteten Grösse. Es liegt nun nahe, darnach zu fragen, ob die Hypothese des arithmetischen Mittels nicht einer Verallgemeinerung fähig sei für Beobachtungen in der Ebene und im Raume. Diese Verallgemeinerung ergibt sich ohne jeden Zwang, wenn man jene Hypothese geometrisch deutet. Denkt man sich die einzelnen direkten Beobachtungen einer Grösse unter Zuziehung einer willkürlichen Maasseinheit durch Punkte einer Geraden dargestellt, so fällt die Annahme ihres arithmetischen Mittels überein mit der Wahl des Schwerpunktes jener Punkte. In der That ist die Hypothese, die wahrscheinlichste Lage eines Punktes, für welchen mehrere gleich genaue Beobachtungen vorliegen, sei der Schwerpunkt der beobachteten Punkte, bereits 1709 von Cotes*) ausgesprochen worden. Zur Ableitung des Gesetzes

*) Aestimatio errorum in mixta mathesi, per variationes partium trianguli plani et sphaerici, Cantabrigiae 1722 (et Lemgoviae 1768). Die auf diese Hypothese von Cotes selbst gegründete Regel, um aus

der Fehler in der Ebene und im Raume ist sie von **Schols** angewandt worden.

Es sei X, Y, Z der wahre Punkt; die aufeinanderfolgenden Beobachtungen mögen für ihn die Lagen X_1, Y_1, Z_1; X_2, Y_2, Z_2; X_3, Y_3, Z_3; ... ergeben haben. Diesen Bestimmungen haften die Fehler x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3; ... an, wobei

$$\begin{array}{lll} x_1 = X - X_1 & x_2 = X - X_2 & x_3 = X - X_3 \cdots \\ y_1 = Y - Y_1 & y_2 = Y - Y_2 & y_3 = Y - Y_3 \cdots \\ z_1 = Z - Z_1 & z_2 = Z - Z_2 & z_3 = Z - Z_3 \cdots. \end{array}$$

Bezeichnet $\Phi(x, y, z)$ das Gesetz der Wahrscheinlichkeit des Fehlers x, y, z, so ist die Wahrscheinlichkeit a priori, dass die genannten Fehler oder die Beobachtungen, welche sie herbeigeführt haben, zusammentreffen, proportional dem Produkt

$$\Phi(x_1, y_1, z_1)\, \Phi(x_2, y_2, z_2)\, \Phi(x_3, y_3, z_3) \ldots$$

und dieses Produkt soll ein Maximum werden, wenn man für X, Y, Z die Werte

$$\frac{X_1 + X_2 + X_3 + \cdots}{n}, \qquad \frac{Y_1 + Y_2 + Y_3 + \cdots}{n}, \qquad \frac{Z_1 + Z_2 + Z_3 + \cdots}{n}$$

annimmt oder wenn

---

einer beliebigen Anzahl von Beobachtungen ein unbekanntes Element zu bestimmen derart, dass jede Beobachtung dabei proportional ihrem Einflusse auf das Element mitwirke, welche Regel mit der Methode der kleinsten Quadrate zusammenfällt, enthält das erste durch wissenschaftliche Erörterung gewonnene allgemeine Verfahren zur Lösung der angedeuteten Aufgabe, allerdings nur anwendbar auf den Fall eines Elementes. Vgl. Laplace, Théorie analyt. des Probab., pag. CLXV und 379, nation. édit. — Nicht als Hypothese, aber als Ergebnis der Methode der kleinsten Quadrate ist der Satz, dass die aus mehreren Bestimmungen eines Punktes im Raume resultierende Lage desselben mit dem Schwerpunkt der beobachteten Punkte zusammenfalle, von Legendre (Nouvelles méth., pag. 75) ausgesprochen worden; geradezu als die „wahrscheinlichste Lage“ aus mehreren durch Beobachtung gefundenen ist der Schwerpunkt von Adrain (s. Art. 42) auf Grund des von ihm abgeleiteten Fehlergesetzes nachgewiesen worden. — Vgl. auch Art. 43.

$$(33) \qquad \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + \cdots &= 0 \\ y_1 + y_2 + y_3 + \cdots &= 0 \\ z_1 + z_2 + z_3 + \cdots &= 0 \end{aligned}$$

gesetzt wird.

Setzt man abkürzungsweise

$$(34) \qquad \frac{\partial l \cdot \Phi}{\partial x} = \Psi_1, \qquad \frac{\partial l \cdot \Phi}{\partial y} = \Psi_2, \qquad \frac{\partial l \cdot \Phi}{\partial z} = \Psi_3,$$

so können die Bedingungen des Maximums kurz so angeschrieben werden:

$$(35) \qquad \begin{aligned} \Psi_1(x_1, y_1, z_1) + \Psi_1(x_2, y_2, z_2) + \Psi_1(x_3, y_3, z_3) + \cdots &= 0 \\ \Psi_2(x_1, y_1, z_1) + \Psi_2(x_2, y_2, z_2) + \Psi_2(x_3, y_3, z_3) + \cdots &= 0 \\ \Psi_3(x_1, y_1, z_1) + \Psi_3(x_2, y_2, z_2) + \Psi_3(x_3, y_3, z_3) + \cdots &= 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen sollen nun mit den Gleichungen (33) denselben Inhalt haben.

Für zwei Beobachtungen ist $x_1 + x_2 = 0$, $y_1 + y_2 = 0$, $z_1 + z_2 = 0$, folglich

$$(36) \qquad \Psi_1(x_1, y_1, z_1) = - \Psi_1(-x_1, -y_1, -z_1).$$

Für drei Beobachtungen hat man $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, $y_1 + y_2 + y_3 = 0$, $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, daher mit Rücksicht auf (36)

$$(37) \qquad \Psi_1(x_1, y_1, z_1) + \Psi_2(x_2, y_2, z_2) = \Psi_1(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2);$$

hieraus ergibt sich, wenn man einmal in Bezug auf x_1, dann in Bezug auf x_2 differentiiert und rechter Hand von einem bekannten Satze der Differentialrechnung Gebrauch macht, dass

$$\frac{\partial \Psi_1(x_1, y_1, z_1)}{\partial x_1} = \frac{\partial \Psi_1(x_2, y_2, z_2)}{\partial x_2}$$

oder

$$\frac{\partial \Psi_1(x, y, z)}{\partial x} = \text{const.}$$

Eine ähnliche Beziehung lässt sich in Bezug auf die beiden andern Variabeln y, z und die beiden andern Funktionen Ψ_2, Ψ_3 nachweisen, und man schliesst daraus, dass

$$\begin{aligned} \Psi_1(x, y, z) &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ \Psi_2(x, y, z) &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ \Psi_3(x, y, z) &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z. \end{aligned}$$

Mit Rücksicht auf die Bedeutung dieser Funktionen — sie sind die Ableitungen ein und derselben Funktion von x, y, z in Bezug auf diese drei Variabeln — ist notwendig

$$a_{21} = a_{12} \qquad a_{31} = a_{13} \qquad a_{32} = a_{23}$$

und $l \cdot \Phi$ von der quadratischen Form

$$\frac{1}{2}\{(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z)x + (a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z)y + (a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z)z\}$$

nur um eine Konstante verschieden. Es ist demnach

$$\Phi = Ke^{\frac{1}{2}(a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy)}.$$

Als Ursprung des Koordinatensystems gilt hierbei der Schwerpunkt der beobachteten Punkte. Man kann aber den bisher beliebig angenommenen Axen immer solche Richtungen erteilen, dass die nichtquadratischen Glieder des Exponenten verschwinden. Die Koeffizienten der quadratischen Glieder müssen dann, soll Φ thatsächlich eines Minimums fähig sein, negativ ausfallen. Mithin hat man als allgemeine Form des Fehlergesetzes

$$\Phi = Ke^{-\frac{1}{2}(A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2)}.$$

Zur Bestimmung der Konstanten benütze man vorab die Gleichung (2), Art. 161; dieselbe ergibt (s. Gleichung (11), Art. 118)

$$K = \frac{ABC}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}. \tag{38}$$

Bezeichnet man wie früher den Mittelwert von x^2 mit K_x'', so ist

$$K_x'' = K\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{1}{2}(A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2)}\,dx\,dy\,dz$$

$$= K\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{1}{2}A^2x^2}\,dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}B^2y^2}\,dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}C^2z^2}\,dz$$

$$= K\frac{\sqrt{2\pi}}{A^3}\,\frac{\sqrt{2\pi}}{B}\,\frac{\sqrt{2\pi}}{C},$$

also mit Rücksicht auf (38)

$$K_x'' = \frac{1}{A^2};$$

ebenso findet man

$$K_y'' = \frac{1}{B^2}, \qquad K_z'' = \frac{1}{C^2}.$$

Mithin ist

$$\Phi = \frac{e^{-\left(\frac{x^2}{2K_x''}+\frac{y^2}{2K_y''}+\frac{z^2}{2K_z''}\right)}}{\sqrt{2\pi K_x''}\sqrt{2\pi K_y''}\sqrt{2\pi K_z''}}$$

die endgiltige Form des Fehlergesetzes, übereinstimmend mit (32), Art. 170.

Für Fehler in der Ebene vereinfacht sich die Ableitung und führt zu dem Resultat (31), Art. 170*).

§ 2. Genauigkeit der Bestimmung eines Punktes in der Ebene.

172. Für die nun folgenden Untersuchungen empfiehlt es sich, die Hauptaxen der Wahrscheinlichkeit zu Koordinatenaxen zu wählen, weil dadurch die Analyse wesentlich vereinfacht wird.

Wir betrachten zunächst Fehler in der Ebene. Das wesentliche und nächstliegende, früher schon formulierte Resultat besteht darin, dass

$$\Phi = \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{K_x''}+\frac{y^2}{K_y''}\right)}}{\sqrt{2\pi K_x''}\sqrt{2\pi K_y''}} \tag{1}$$

konstant bleibt für alle Wertverbindungen von x und y, für welche die mit einer Konstanten $\varkappa$ gebildete Gleichung

$$\frac{x^2}{2K_x''} + \frac{y^2}{2K_y''} = \varkappa^2 \tag{2}$$

besteht. Man bezeichnet die in dieser Gleichung enthaltenen Ellipsen als Fehlerellipsen. Ihre Halbaxen sind allgemein $\varkappa\sqrt{2K_x''}$, $\varkappa\sqrt{2K_y''}$.

---

*) Eine direkte Ableitung des Grenzgesetzes der Fehler in der Ebene und im Raume nach dem Vorbilde der Bessel'schen für lineare Fehler hat Schols 1887 gegeben in den Annales de l'École Polytechn. de Delft, III, pag. 195 flg.

173. Das mittlere Quadrat des Fehlers in der Punktbestimmung ist nach Gleichung (9), Art. 164,

$$K'' = K_x'' + K_y''; \tag{3}$$

der mittlere Fehler $\sqrt{K''}$ der Punktbestimmung ist demnach geometrisch dargestellt durch die halbe Diagonale des Axenrechtecks jener Fehlerellipse, welche zu $\varkappa^2 = \frac{1}{2}$ gehört. Aus diesem Grunde wurde diese Ellipse von Helmert*) als mittlere Fehlerellipse eingeführt; ihre Halbaxen sind $\sqrt{K_x''}$ und $\sqrt{K_y''}$.

Vom Standpunkte der Mechanik ist

$$K_x'' = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \Phi \, dx \, dy$$

das Trägheitsmoment der Wahrscheinlichkeitsfläche in Bezug auf die Y-Axe, und da

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi \, dx \, dy = 1,$$

so ist $\sqrt{K_x''}$ zugleich der Trägheitshalbmesser für diese Axe. Hiernach ist die mittlere Fehlerellipse

$$\frac{x^2}{K_x''} + \frac{y^2}{K_y''} = 1$$

gleichbedeutend mit der Zentralellipse und alle Fehlerellipsen sind der Zentralellipse ähnlich. Ihre Konstruktion aus einem System beobachteter Punkte kann also nach den Methoden der graphischen Statik vor sich gehen.

Diese Ergebnisse gelten unter der Voraussetzung, dass der Schwerpunkt mit dem Fehlerursprung zusammenfällt; findet dies nicht statt, hat vielmehr der Fehler einen konstanten Anteil, so tritt an die Stelle der Zentralellipse die auf den Ursprung bezogene Trägheitsellipse**).

174. Die Bestimmung des durchschnittlichen Fehlers führt auf ein elliptisches Integral. Eine interessante geo-

*) Ausgleichungsrechnung, Leipzig, 1872, pag. 236.

**) Vgl. Jung, Compt. rend., CVI, pag. 1001.

metrische Deutung desselben hat **Bravais** gegeben. Führt man in der ihn bestimmenden Gleichung

$$K' = 4 \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{K_x''} + \frac{y^2}{K_y''}\right)}}{\sqrt{2\pi K_x''}\,\sqrt{2\pi K_y''}} \sqrt{x^2 + y^2}\, dx\, dy$$

an Stelle von x die neue Variable ξ durch die Gleichung $x = \xi y$ ein, so wird $dx = y d\xi$ und

$$K' = \sqrt{\frac{2}{\pi K_x'' K_y''}} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{y^2}{2}\left(\frac{\xi^2}{K_x''} + \frac{1}{K_y''}\right)} y^2 \sqrt{\xi^2 + 1}\, d\xi\, dy;$$

durch Ausführung der auf y bezüglichen Integration ergibt sich

$$(4) \qquad K' = \sqrt{\frac{2}{\pi K_x'' K_y''}} \int_0^\infty \frac{(\xi^2 + 1)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{\xi^2}{K_x''} + \frac{1}{K_y''}\right)^{\frac{3}{2}}}\, d\xi.$$

Andererseits ist das Bogendifferential der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$ds = \sqrt{\frac{a^4 y^2 + b^4 x^2}{a^4 y^2}}\, dx;$$

transformiert man dasselbe durch die Substitution

$$x = ty,$$

vermöge welcher die Ellipse durch das Gleichungspaar

$$x = t\left(\frac{t^2}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$y = \left(\frac{t^2}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

dargestellt und

$$dx = \frac{1}{b^2}\left(\frac{t^2}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^{-\frac{3}{2}} dt$$

ist, so kommt

$$ds = \frac{\left(\frac{t^2}{a^4} + \frac{1}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{t^2}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\, dt$$

und der Umfang der Ellipse wird

$$s = 4\int_0^a \sqrt{\frac{a^4y^2 + b^4x^2}{a^4y^2}}\, dx = 4\int_0^\infty \frac{\left(\frac{t^2}{a^4} + \frac{1}{b^4}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{t^2}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\, dt.$$

Setzt man aber hierin $t = \frac{a^2}{b^2}\xi$, hierauf $a^2 = \frac{f}{K_x''}$, $b^2 = \frac{f}{K_y''}$, wobei f einen vorläufig unbestimmten Faktor bezeichnet, so erlangt der Ausdruck für den Umfang die Form

$$s = \frac{4\sqrt{f}}{K_x'' K_y''}\int_0^\infty \frac{(\xi^2 + 1)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{\xi^2}{K_x''} + \frac{1}{K_y''}\right)^{\frac{3}{2}}}\, d\xi.$$

Dies stimmt der Form nach mit (4) überein und auch dem Werte nach dann, wenn

$$\frac{4\sqrt{f}}{K_x'' K_y''} = \sqrt{\frac{2}{\pi K_x'' K_y''}}$$

oder wenn

$$f = \frac{1}{8\pi} K_x'' K_y''.$$

Die zugehörige Ellipse hat die Gleichung

$$K_x'' x^2 + K_y'' y^2 = \frac{K_x'' K_y''}{8\pi},$$

ist also den Fehlerellipsen ähnlich, jedoch um einen rechten Winkel gegen dieselben gedreht, oder ähnlich und ähnlich liegend mit der Ellipse der mittleren Fehler (s. Gleichung (19), Art. 166), und hat die Fläche $\frac{1}{8}\sqrt{K_x'' K_y''}$.

Dei durchschnittliche Fehler der Punktbestimmung wird also dargestellt durch den Umfang einer Ellipse, welche den

Fehlerellipsen ähnlich ist und zur Fläche $\frac{1}{32}$ des Axenrechtecks der mittleren Fehlerellipse hat.

175. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler zwischen den Grenzen ϱ und $\varrho + d\varrho$ liege, ist zufolge der Gleichung (3), Art. 162, proportional

$$\Phi_\varrho = \frac{\varrho}{2\pi\sqrt{K_x'' K_y''}} \int_0^{2\pi} e^{-\frac{\varrho^2}{2}\left(\frac{\cos^2\varphi}{K_x''} + \frac{\sin^2\varphi}{K_y''}\right)} d\varphi .$$

Gibt man dem Exponenten die Form

$$-\frac{\varrho^2}{4} \frac{K_x'' + K_y''}{K_x'' K_y''}\left(1 - \frac{K_x'' - K_y''}{K_x'' + K_y''} \cos 2\varphi\right)$$

und setzt

$$\varrho = u\sqrt{K''}, \qquad \frac{K_x'' - K_y''}{K_x'' + K_y''} = \nu,$$

so wird

$$\frac{(K_x'' + K_y'')^2}{4 K_x'' K_y''} = \frac{1}{1-\nu^2}$$

und

$$(5) \qquad \Phi_{u\sqrt{K''}} = \frac{u}{\pi\sqrt{1-\nu^2}} \int_0^{2\pi} e^{-\frac{u^2}{1-\nu^2}(1-\nu\cos 2\varphi)} d\varphi$$

Das Integral kann nur mittels einer Reihenentwicklung berechnet werden.

Aus dem eben gefundenen Resultate lässt sich unmittelbar die Wahrscheinlichkeit*) $\Theta(\sigma\sqrt{K''})$ bestimmen, dass ϱ in dem endlichen Intervall 0 bis $\sigma\sqrt{K''}$ eingeschlossen sei; es ist nämlich

$$\Theta(\sigma\sqrt{K''}) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-\nu^2}} \int_0^{\sigma}\int_0^{2\pi} e^{-\frac{u^2}{1-\nu^2}(1-\nu\cos 2\varphi)} u\, du\, d\varphi .$$

Nachdem man die Integration in Bezug auf u ausgeführt hat, wird

*) Das Zeichen Θ hat hier zwar eine ähnliche wahrscheinlichkeitstheoretische, aber eine andere analytische Bedeutung wie bei linearen Fehlern.

$$\Theta(\sigma\sqrt{K''}) = \frac{\sqrt{1-\nu^2}}{2\pi}\left\{\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{1-\nu\cos 2\varphi} - \int\limits_0^{2\pi}\frac{e^{-\frac{\sigma^2}{1-\nu^2}(1-\nu\cos 2\varphi)}}{1-\nu\cos 2\varphi}\,d\varphi\right\},$$

somit schliesslich

$$(6)\qquad \Theta(\sigma\sqrt{K''}) = 1 - \frac{\sqrt{1-\nu^2}}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{e^{-\frac{\sigma^2}{1-\nu^2}(1-\nu\cos 2\varphi)}}{1-\nu\cos 2\varphi}\,d\varphi.$$

Das hier auftretende Integral kann wieder nur näherungsweise mittels Reihenentwicklung berechnet werden.

176. Bezeichnet σ_1 denjenigen Wert von σ, welcher der Gleichung

$$(7)\qquad \frac{\sqrt{1-\nu^2}}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{e^{-\frac{\sigma^2}{1-\nu^2}\left((1-\nu\cos 2\varphi)\right)}}{1-\nu\cos 2\varphi}\,d\varphi = \frac{1}{2}$$

entspricht, so ist

$$(8)\qquad R = \sigma_1\sqrt{K''}$$

der wahrscheinliche Fehler der Punktbestimmung in dem Sinne, dass es ebenso wahrscheinlich ist, der Punkt liege ausserhalb wie innerhalb eines mit dem Radius R aus dem Fehlerursprung beschriebenen Kreises. Wie die Gleichung (7) zeigt, hängt σ_1 von ν ab. Die äussersten Werte von ν sind ± 1 und 0; der Fall ± 1 tritt für lineare Fehler ein, wenn nämlich entweder $K_y'' = 0$ oder $K_x'' = 0$ ist, und dann hat man $\sigma_1 = 0{,}67449$; der Wert 0 von ν setzt $K_x'' = K_y''$ voraus und entspricht dem Falle, wo die Fehlerellipsen in konzentrische Kreise übergehen; Gleichung (7) lautet dann

$$e^{-\sigma^2} = \frac{1}{2}$$

und gibt $\sigma_1 = 0{,}83256$. Zwischen diesen Grenzen bewegen sich die Werte von σ_1; einige derselben sind nach den Rechnungen von Schols nachstehend mitgeteilt.

v	σ_1	v	σ_1
0,0	0,8326	0,6	0,7785
0,1	0,8312	0,7	0,7562
0,2	0,8271	0,8	0,7289
0,3	0,8200	0,9	0,6989
0,4	0,8098	1,0	0,6745
0,5	0,7962		

177. Abgesehen von den analytischen Schwierigkeiten, welche sich bei Betrachtung von Fehlern gleicher Grösse ergeben haben, entspricht es der Natur der Sache besser, Lagen gleicher Wahrscheinlichkeit zu verfolgen und daher die Ebene statt durch konzentrische Kreise durch Fehlerellipsen in Elemente zu zerlegen.

Bezeichnet man die Fläche der Ellipse (2), Art. 172, mit u, die Änderung, welche sie erfährt, wenn $\varkappa$ in $\varkappa + d\varkappa$ übergeht, mit du, mit $\Phi_\varkappa$ den den Punkten dieser Ellipse entsprechenden Wert von Φ, so ist $\Phi_\varkappa du$ die Wahrscheinlichkeit, dass der Punkt in den Ring zwischen den beiden benachbarten Ellipsen $\varkappa^2$ und $(\varkappa + d\varkappa)^2$ fallen werde. Nun ist

$$u = 2\pi\varkappa^2\sqrt{K_x''K_y''}, \tag{9}$$

folglich

$$du = 4\pi\varkappa d\varkappa\sqrt{K_x''K_y''}$$

und im Hinblick auf (1), Art. 172,

$$\Phi_\varkappa du = 2\varkappa e^{-\varkappa^2}d\varkappa. \tag{10}$$

Daraus folgt dafür, dass der Punkt ausserhalb der bezeichneten Ellipse zu liegen komme, die Wahrscheinlichkeit

$$\int\limits_{\varkappa=\varkappa}^{\varkappa=\infty}\Phi_\varkappa du = e^{-\varkappa^2} \tag{11}$$

und somit die Wahrscheinlichkeit, dass er innerhalb der Ellipse liege,

$$\Theta(\varkappa) = 1 - e^{-\varkappa^2}. \tag{12}$$

Eine bemerkenswerte Fassung hat Bravais dem Resultat (11) gegeben. Er führt eine Fehlerellipse, deren Fläche 1 ist, unter dem Namen Fundamentalellipse ein.

Bezeichnet man den ihr zugehörigen Wert von $\varkappa$ mit $\varkappa_1$, so folgt aus Gleichung (9)

$$\varkappa_1^2 = \frac{1}{2\pi\sqrt{K_x'' K_y''}}, \tag{13}$$

und es kann dann Gleichung (9) in der Form

$$u = \frac{\varkappa^2}{\varkappa_1^2} \tag{14}$$

geschrieben werden; setzt man den hieraus fliessenden Wert von $\varkappa^2$ in (11) ein, so wird die äussere Wahrscheinlichkeit für die Ellipse von der Fläche u gleich

$$(e^{-\varkappa_1^2})^u,$$

d. h. sie wird gleich der äussern Wahrscheinlichkeit für die Fundamentalellipse erhoben zur Potenz u. Daraus kann schon geschlossen werden, wie rasch die äussere Wahrscheinlichkeit mit dem Wachsen der Fehlerellipse sich Null, die innere Wahrscheinlichkeit der Einheit nähert.

Einige Werte von $\Theta(\varkappa)$ sind nachstehend nach den Tabellen von Schols zusammengestellt.

$\varkappa$	$\Theta(\varkappa)$	$\varkappa$	$\Theta(\varkappa)$
0,0	0,0000	1,2	0,7631
0,1	0,0099	1,4	0,8591
0,2	0,0392	1,6	0,9227
0,3	0,0861	1,8	0,9608
0,4	0,1479	2,0	0,9817
0,5	0,2212	2,2	0,9921
0,6	0,3023	2,4	0,9968
0,7	0,3874	2,6	0,9988
0,8	0,4727	2,8	0,9996
0,9	0,5551	3,0	0,9999
1,0	0,6321		

Diejenige Ellipse, bei welcher die äussere Wahrscheinlichkeit der innern gleichkommt, nennt man die wahrscheinliche Fehlerellipse; der ihr zugehörige Wert von $\varkappa$ ist die Wurzel der Gleichung

$$e^{-\varkappa^2} = \frac{1}{2},$$

d. i. $\varkappa = 0,83256$, ihre Halbaxen sind also

$$(15)\qquad \begin{aligned} 0{,}83256\sqrt{2K_x''} &= 1{,}17741\sqrt{K_x''} \\ 0{,}83256\sqrt{2K_y''} &= 1{,}17741\sqrt{K_y''}, \end{aligned}$$

so dass sie aus der mittleren Fehlerellipse durch lineare Vergrösserung in dem Verhältnis 1 : 1,17741 hervorgeht.

178. Mit Rücksicht auf die Gleichungen (13) und (14) ist für jeden Punkt der Ellipse (2), Art. 172,

$$\Phi_x = x_1^2 e^{-x_1^2 u};$$

multipliziert man diese Funktion mit dem an einen solchen Punkt, dessen Polarkoordinaten ϱ, φ sein mögen, anstossenden Element $\varrho d\varrho d\varphi$ der Ebene, so ergibt sich die Wahrscheinlichkeit für die Lage des Punktes in diesem Element. Heisst aber der zu φ gehörige Leitstrahl der Fundamentalellipse ϱ_1, so ist vermöge der Ähnlichkeit, welche zwischen dieser und den andern Fehlerellipsen besteht,

$$\varrho^2 = \varrho_1^2 u,$$

somit $\varrho d\varrho = \frac{1}{2}\varrho_1^2 du$ und

$$\Phi_x \varrho\, d\varrho\, d\varphi = \frac{1}{2}\varrho_1^2 x_1^2 e^{-x_1^2 u}\, du\, d\varphi.$$

Integriert man diesen Ausdruck in Bezug auf ϱ, respektive u zwischen den Grenzen 0 und ∞, so drückt

$$(16)\qquad d\varphi \int_0^\infty \Phi_x \varrho\, d\varrho = \frac{1}{2}\varrho_1^2\, d\varphi$$

die Wahrscheinlichkeit aus, dass der Punkt in den durch die Strahlen φ und $\varphi + d\varphi$ begrenzten Sektor der Ebene falle. Diese Wahrscheinlichkeit wird also durch den zugeordneten Sektor der Fundamentalellipse dargestellt. Diese Eigenschaft überträgt sich auch auf Sektoren mit endlichem Centriwinkel.

Man kann das letzte Resultat auch dahin deuten, dass die Wahrscheinlichkeit, der Punkt weiche von der wahren Lage in irgend einer Richtung ab, proportional ist dem Quadrate des durch diese Richtung bezeichneten Halb- oder Durchmessers der Fundamental- oder irgend einer festen Fehlerellipse.

179. Durch jeden Punkt der Ebene geht eine und nur eine Fehlerellipse; jedem Punkte entspricht daher als charakteristische Zahl ein bestimmter Wert von $\varkappa^2$, welcher sich ergibt, wenn man seine Koordinaten in die Gleichung (2), Art. 172, einsetzt. Wenn also nach (10), Art. 177, $2\varkappa e^{-\varkappa^2} d\varkappa$ die Wahrscheinlichkeit ausdrückt, ein Punkt falle zwischen die Ellipsen $\varkappa^2$ und $(\varkappa + d\varkappa)^2$, so kann derselbe Ausdruck auch als Wahrscheinlichkeit gedeutet werden, der einem Punkte der Ebene zugeordnete Wert von $\varkappa^2$ falle zwischen die Grenzen $\varkappa^2$ und $(\varkappa + d\varkappa)^2$. In diesem Sinne kann von einem Mittelwert von $\varkappa^2$ gesprochen werden und derselbe ist

$$(17) \qquad \int_0^\infty 2\varkappa^{3-\varkappa^2} d\varkappa = 1.$$

Hat man also zu einer sehr grossen Anzahl beobachteter Punkte die zugehörigen Werte von $\varkappa^2$ berechnet und ihren Durchschnitt gebildet, so ist dieser Durchschnittswert von der Einheit mutmaasslich nur wenig verschieden und zwar um so weniger, je grösser die Punktmenge ist.

180. Anschliessend an die allgemeine Theorie soll nun die Lösung der Aufgabe vorgeführt werden, auf Grund eines aus Beobachtungen oder Versuchen hervorgegangenen Punktsystems das zugehörige Fehlergesetz festzustellen unter der Voraussetzung, dass es die Gestalt des Grenzgesetzes aufweise.

In einer Ebene sei eine sehr grosse Anzahl von Punkten gegeben, deren jeder als eine Bestimmung eines bezeichneten oder eines unbekannten Punktes zu betrachten ist, von welchem er infolge verschiedener Fehlerursachen abweicht; vorausgesetzt wird, dass alle Punkte unter gleichen Umständen oder mit derselben Genauigkeit bestimmt worden sind.

Man bestimme den Schwerpunkt des Punktsystems entweder durch geometrische Konstruktion oder durch Rechnung, indem man die Punkte auf ein beliebiges rechtwinkliges Koordinatensystem bezieht und die Koordinaten X_i, Y_i jedes einzelnen in Zahlen ausdrückt; es sind dann, wenn n die Anzahl der Punkte bezeichnet,

$$(1) \qquad X = \frac{\Sigma X_i}{n}, \qquad Y = \frac{\Sigma Y_i}{n}$$

die Koordinaten des Schwerpunktes.

Im ersten Falle, wo die einzelnen Punkte als Bestimmungen eines bezeichneten Punktes auftreten, kann der Schwerpunkt mit diesem zusammenfallen oder von ihm verschieden sein; geschieht das erste, so ist der der Punktbestimmung oder den Versuchen anhaftende Fehler von einem konstanten Anteil frei; tritt das letztere ein, so stellt die Verbindungslinie des bezeichneten Punktes mit dem Schwerpunkte den konstanten Teil des Fehlers dar.

Im zweiten Falle, wo die einzelnen Punkte als Bestimmungen eines unbekannten Punktes anzusehen sind, bezeichnet der Schwerpunkt die vorteilhafteste, beziehungsweise die wahrscheinlichste Bestimmung seiner Lage.

Wie dem auch sei, wenn man nun den Ursprung des Koordinatensystems nach dem Schwerpunkt verlegt und die Koordinaten des Punktes i in Bezug auf dieses neue System mit x_i, y_i bezeichnet, so repräsentiert die Strecke zwischen dem Koordinatenanfang und dem Punkte x_i, y_i den Fehler des letzteren nach Grösse und Richtung. Wenn angenommen werden kann, dass der Fehler jeder Bestimmung aus dem Zusammenwirken einer sehr grossen Anzahl von Fehlerursachen entsprungen sei, so ist das Gesetz des Fehlers von der Form

$$(2) \qquad \Phi = \frac{\sqrt{a_{11} a_{22} - a_{12}^2}}{\pi} e^{-(a_{11} x^2 + 2 a_{12} x y + a_{22} y^2)}$$

und es handelt sich zunächst darum, auf Grund der gegebenen x_i, y_i die Koeffizienten a_{11}, a_{12}, a_{22} zu bestimmen.

Die Wahrscheinlichkeit, dass bei beliebigem Werte von y der Wert von x in das Intervall x bis $x + dx$ falle, ist

$$dx \int_{-\infty}^{\infty} \Phi dy = \frac{\sqrt{a_{11} a_{22} - a_{12}^2}}{\pi} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(a_{11} x^2 + 2 a_{12} x y + a_{22} y^2)} dy$$

$$= \sqrt{\frac{a_{11} a_{22} - a_{12}^2}{\pi a_{22}}} e^{-\frac{a_{11} a_{22} - a_{12}^2}{a_{12}} x^2} dx;$$

hieraus folgt als Mittelwert von x^2

$$(3)\quad K_x''=\sqrt{\frac{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}{\pi a_{22}}}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}{a_{22}}x^2}dx=\frac{a_{22}}{2(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)}.$$

In ähnlicher Weise findet man

$$(4)\qquad K_y''=\frac{a_{11}}{2(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)}.$$

Endlich ist der Mittelwert des Produktes xy gleich

$$K_{xy}''=\frac{\sqrt{a_{12}a_{22}-a_{12}^2}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\,e^{-(a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2)}\,dx\,dy$$

$$=\frac{\sqrt{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x\,e^{-\frac{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}{a_{22}}x^2}dx\int_{-\infty}^{\infty} y\,e^{-\frac{1}{a_{22}}(a_{22}y+a_{12}x)^2}dy;$$

die erste Integration gibt, wenn man $\frac{a_{22}y+a_{12}x}{\sqrt{a_{22}}}=t$ setzt,

$$-\frac{a_{12}\sqrt{\pi}}{\sqrt{a_{22}^3}}\,x,$$

so dass weiter

$$K_{xy}''=-\frac{\sqrt{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}}{\pi}\,\frac{a_{12}\sqrt{\pi}}{\sqrt{a_{22}^3}}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}{a_{22}}x^2}dx,$$

d. i. endlich mit Rücksicht auf (3)

$$(5)\qquad K_{xy}''=-\frac{a_{12}}{2(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)}.$$

Aus den Gleichungen (3), (4) und (5) ergibt sich nun umgekehrt

$$(6)\qquad \begin{aligned} a_{11}&=\frac{K_y''}{2(K_x''K_y''-K_{xy}'')}\\ a_{22}&=\frac{K_x''}{2(K_x''K_y''-K_{xy}'')}\\ a_{12}&=\frac{-K_{xy}''}{2(K_x''K_y''-K_{xy}'')}. \end{aligned}$$

Ist nun die Anzahl n der Punkte sehr gross, so darf man, ohne einen beachtenswerten Fehler fürchten zu müssen, die Gleichungen anschreiben

$$(7)\qquad \begin{aligned} K_x'' &= \frac{[xx]}{n} \\ K_y'' &= \frac{[yy]}{n} \\ K_{xy}'' &= \frac{[xy]}{n}; \end{aligned}$$

wenn man diese Bestimmungen in (6) einträgt, so sind die Koeffizienten in (3) ziffermässig bestimmt und es können alle weiteren Konsequenzen dieser Formel gezogen und mit den vorliegenden Thatsachen verglichen werden. Insbesondere können mit Hilfe der Gleichung (14), Art. 165, die Hauptaxen der Wahrscheinlichkeit, dann mit Hilfe von (15) desselben Artikels die mittleren Quadrate der auf sie bezogenen Fehlerprojektionen berechnet und das Fehlergesetz dann in der Form (31), Art. 170, aufgestellt werden. Die Wahl der Hauptaxen bietet den besonderen Vorteil, dass mit Bezug auf dieselben die Fehlerprojektionen als unabhängig angesehen werden dürfen.

181. Der erste der beiden oben differentiierten Fälle ergibt sich bei Schiessversuchen. Der bezeichnete Punkt der Ebene ist der Zielpunkt, die beobachteten Punkte sind die Treffpunkte der Geschosse, ihr System das sogenannte Trefferbild.

In der Schiesstechnik ist es üblich, die Spur der Schussebene auf der Zielfläche (oder die durch den Zielpunkt zu ihr geführte Parallele) als die eine, und die durch den Zielpunkt dazu gelegte Senkrechte als die andere der beiden Axen anzunehmen, auf welche man die Treffpunkte bezieht, und die Abweichungen der letzteren von den genannten Axen wie unabhängige Fehler zu behandeln. Dieses Verfahren, ohne Begründung hingestellt, würde zu richtigen Resultaten nur dann führen, wenn die bezeichneten Linien die Hauptaxen der Wahrscheinlichkeit wären; im Allgemeinen aber ist es unrichtig.

Wie Schols bemerkt, werden vermöge der Symmetrie der Geschütze in Bezug auf die Schussebene die erwähnten Linien in der That annähernd mit den Hauptaxen der Wahrscheinlichkeit zusammenfallen. Die Bemerkung wird wohl bei schweren Geschützen mit fester Aufstellung, bei Handfeuerwaffen aber kaum zutreffen, eben so wenig wie bei gezogenen Geschützen. Hier also sollte das im vorigen Artikel erläuterte Verfahren Anwendung finden.

182. Als interessantes Beispiel, das geeignet ist, die vorgetragenen Theorien zu bestätigen, mögen die Schiessversuche vorgeführt werden, welche Bertrand in seinem Calc. des Probab., art. 185—187 in der beschriebenen Weise behandelt hat.

Von zehn Schützen wurden aus zehn Handfeuerwaffen desselben Modells auf eine Scheibe in 200 m Distanz je zehn, im Ganzen also 1000 Schüsse abgegeben. Die Treffpunkte sind ohne Zweifel*) auf die durch den Zielpunkt geführte Vertikale und Horizontale bezogen worden und es ergaben sich für den Schwerpunkt (mittleren Treffpunkt) die Koordinaten

$$X = 0{,}08 \text{ m}, \qquad Y = 0{,}21 \text{ m},$$

so dass $\sqrt{0{,}08^2 + 0{,}21^2} = 0{,}225$ m die Grösse des konstanten Fehleranteils ist.

Nachdem das Trefferbild auf den mittleren Treffpunkt bezogen worden war, ergaben sich mittels der Koordinaten der einzelnen Punkte die Werte

$$K_x'' = 568{,}255, \quad K_y'' = 648{,}666, \quad K_{xy}'' = 33{,}221.$$

Hieraus berechnen sich mittels der Gleichung (14), Art. 165,

$$\operatorname{tg} 2\psi = \frac{2 K_{xy}''}{K_x'' - K_y''},$$

die Winkel, welche die Hauptaxen der Wahrscheinlichkeit

*) Wie dies ganz allgemein üblich ist; bei Bertrand ist darüber nichts bemerkt.

mit der positiven Abszissenaxe des zu Grunde gelegten Systems einschliessen, und zwar

$$\psi = -19^0\,47', \qquad \psi + \frac{\pi}{2} = 70^0\,13';$$

es besteht also eine ganz beträchtliche Abweichung der Hauptaxen von den ursprünglich angenommenen Linien.

Man findet ferner auf Grund von (6), Art. 180, die Koeffizienten

$$a_{11} = 0{,}0008825, \quad a_{22} = 0{,}0007732, \quad a_{12} = -0{,}0000452$$

und kann mit denselben die allgemeine Gleichung der Fehlerellipsen

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = \varkappa^2$$

bilden.

Für die innere Wahrscheinlichkeit der Ellipse $\varkappa^2$ wurde (s. Gleichung (12), Art. 177) der Ausdruck

$$\Theta(\varkappa) = 1 - e^{-\varkappa^2}$$

gefunden; setzt man der Reihe nach

$\Theta(\varkappa) =$		$\varkappa^2 =$
0,1,	so wird	0,10537
0,2		0,22315
0,3		0,35668
0,4		0,51083
0,5		0,69315
0,6		0,91630
0,7		1,20398
0,8		1,60944
0,9		2,30259;

hierdurch sind neun Fehlerellipsen charakterisiert, welche die ganze Ebene in zehn ungleiche Regionen einteilen, deren jede mutmaasslich den zehnten Teil der Schüsse, also deren 100 enthalten sollte.

Die wirkliche Zählung ergab*):

*) Die Zahlen weichen von den Bertrand'schen an drei Stellen ab, und zwar infolge eines Versehens, das bei ihm in der Zahlenreihe der $\varkappa^2$ unterlaufen ist und dadurch, dass er zwei an der Scheibe vorbeigegangene Schüsse nicht zählt.

Region	Treffpunkte	Abweich. v. d. mutm. Zahl.
I	99	+ 1
II	106	− 6
III	100	0
IV	108	− 8
V	100	0
VI	118	−18
VII	86	+14
VIII	94	+ 6
IX	90	+10
X	99	+ 1
	1000	

Wenn schon der Anblick dieser Zahlen eine befriedigende Übereinstimmung mit der Theorie erkennen lässt, so wird ein genaueres Eingehen dies noch deutlicher zeigen.

Ist allgemein p die auf eine Region bezügliche Wahrscheinlichkeit des Treffens, n die Anzahl der abgegebenen Schüsse, so ist np die wahrscheinliche Anzahl der Treffpunkte in jener Region; bezeichnet v die beobachtete Anzahl, so ist der Mittelwert von

$$(v - np)^2$$

das mittlere Quadrat der Abweichung zwischen v und np. Entwickelt lautet dieser Ausdruck

$$v^2 - 2vnp + n^2p^2$$

und verwandelt sich, da der mittlere oder wahrscheinliche Wert von v gleich np ist, zunächst in

$$M(v^2) - n^2p^2.$$

Um den Mittelwert von v^2 zu bestimmen, gehen wir von der Entwicklung

$$(p + q)^n = \sum A_v p^v$$

aus, in welcher, wenn $q = 1 - p$, das allgemeine Glied $A_v p_v$ die Wahrscheinlichkeit vorstellt, dass das Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit p ist, in n Versuchen v mal eintrifft; folglich ist

$$M(v^2) = \sum v^2 A_v p^v.$$

Wenn man aber die vorangehende Gleichung in Bezug auf p differentiiert und hierauf mit p multipliziert, so findet man

$$np(p+q)^{n-1} = \sum \nu A_\nu p^\nu$$

und nach nochmaliger Wiederholung des nämlichen Vorgangs

$$np(p+q)^{n-1} + n(n-1)p^2(p+q)^{n-2} = \sum \nu^2 A_\nu p_\nu,$$

so dass wegen $p+q=1$

$$M(\nu^2) = n^2p^2 + npq.$$

Es ist demnach schliesslich das mittlere Quadrat der Abweichung $\nu - np$ zwischen dem beobachteten und dem wahrscheinlichen Wert gleich

$$npq.$$

In unserem Falle ist $n = 1000$ und für jede der zehn Regionen $p = 0{,}1$, $q = 0{,}9$, daher dieses mittlere Quadrat gleich 90. Die Quadrate der beobachteten Abweichungen sind

1, 36, 0, 64, 0, 324, 196, 36, 100, 1,

ihr Mittelwert 73,8 liegt unter dem theoretischen Betrage 90.

Man kann diese Betrachtung noch in einer andern Richtung ausnützen. Zählt man nämlich die Treffpunkte, welche innerhalb der aufeinander folgenden Ellipsen enthalten sind, so ergeben sich folgende Zahlen:

Ellipse	Treffpunkte	Mutm. Anz.	Abweich.
1	99	100	+ 1
2	205	200	— 5
3	305	300	— 5
4	413	400	— 13
5	513	500	— 13
6	631	600	— 31
7	717	700	— 17
8	811	800	— 11
9	901	900	— 1.

Rechnet man nun den Ausdruck npq für $p = 0{,}1, 0{,}2, \cdots 0{,}9$ und vergleicht die so gefundenen mittleren Quadrate mit den beobachteten, so kommt man zu den Zahlenreihen:

Ellipse	Beobacht. Quadr. der Abweich.	Mittlere Quadr. der Abweich.
1	1	90
2	25	160
3	25	210
4	169	240
5	169	250
6	961	240
7	289	210
8	121	160
9	1	90

welche die Theorie aufs Neue in befriedigender Weise bestätigen. Es zeigen nämlich die beobachteten Quadrate annähernd denselben Gang wie die mittleren und liegen, mit zwei Ausnahmen, unter diesen.

Nachdem für jeden Treffpunkt mittelst seiner Coordinaten der zugehörige Wert von x^2 berechnet worden war, ergab sich als Mittelwert der verschiedenen x^2 der Betrag 0,981 an Stelle des theoretischen Wertes 1. Die Abweichung beträgt also 0,019, ihr Quadrat 0,0004.

Der Mittelwert dieses Quadrates ist der mittlere Wert des Ausdrucks

$$\left(\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n} - 1\right)^2,$$

dessen Entwicklung

$$\frac{1}{n^2}\sum x_i^4 + \frac{1}{n^2}\sum x_i^2 x_j^2 - \frac{2}{n}\sum x_i^2 + 1 \qquad (i \lessgtr j)$$

lautet; da nun der Mittelwert eines jeden x^2 gleich 1 und der Mittelwert eines jeden x^4 gleich

$$\int_0^\infty 2x^5 e^{-x^2} dx = 4\int_0^\infty x^3 e^{-x^2} dx = 2$$

ist, so hat man für den genannten Mittelwert

$$\frac{2}{n} + \frac{n-1}{n} - 2 + 1 = \frac{1}{n};$$

im vorliegenden Falle, wo $n = 1000$, ist er 0,001, also grösser als das beobachtete Quadrat 0,0004.

§ 3. Genauigkeit der Bestimmung eines Punktes im Raume.

183. Die vornehmste und wichtigste früher schon erwähnte Eigenschaft des Gesetzes der räumlichen Fehler besteht darin, dass

$$(1)\qquad \Phi = \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{K_x''}+\frac{y^2}{K_y''}+\frac{z^2}{K_z''}\right)}}{\sqrt{2\pi K_x''}\sqrt{2\pi K_y''}\sqrt{2\pi K_z''}}$$

konstant bleibt für alle Wertverbindungen von x, y, z, welche der Gleichung

$$(2)\qquad \frac{x^2}{2K_x''}+\frac{y^2}{2K_y''}+\frac{z^2}{2K_z''}=\varkappa^2$$

genügen, in welcher $\varkappa^2$ eine beliebige positive Konstante bezeichnet. Die Ellipsoide, welche durch diese Gleichung dargestellt sind, wird man Fehlerellipsoide nennnen. Ihre Halbaxen sind allgemein $\varkappa\sqrt{2K_x''}$, $\varkappa\sqrt{2K_y''}$, $\varkappa\sqrt{2K_z''}$.

184. Das mittlere Quadrat des Fehlers in der Punktbestimmung ist (s. Gleichung (12), Art. 164)

$$(3)\qquad K'' = K_x'' + K_y'' + K_z'';$$

der mittlere Fehler $\sqrt{K''}$ selbst ist also dargestellt durch die halbe Diagonale des Axenparallelepipeds jenes Ellipsoids, welches $\varkappa^2 = \frac{1}{2}$ entspricht; man wird dieses Ellipsoid das mittlere Fehlerellipsoid nennen; seine Halbaxen sind $\sqrt{K_x''}$, $\sqrt{K_y''}$, $\sqrt{K_z''}$.

185. Der durchschnittliche Fehler hängt wie in der Ebene von elliptischen Integralen ab und lässt ebenfalls, wie Bravais gezeigt hat, eine bemerkenswerte geometrische Deutung zu. Sein Wert ist bestimmt durch

$$K' = 8\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{K_x''}+\frac{y^2}{K_y''}+\frac{z^2}{K_z''}\right)}}{\sqrt{2\pi K_x''}\sqrt{2\pi K_y''}\sqrt{2\pi K_z''}}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz;$$

führt man an Stelle von x, y neue unabhängige Variable ξ, η ein durch die Gleichungen

$$x = \xi z, \quad y = \eta z,$$

so wird

$$K' = 8\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{z^2}{2}\left(\frac{\xi^2}{K_x''}+\frac{\eta^2}{K_y''}+\frac{1}{K_z''}\right)}}{\sqrt{2\pi K_x''}\sqrt{2\pi K_y''}\sqrt{2\pi K_z''}}\, z^3\sqrt{\xi^2+\eta^2+1}\, d\xi\, d\eta\, dz$$

und nach Ausführung der Integration, die auf z sich bezieht,

$$(4)\quad K' = \frac{8}{\pi\sqrt{2\pi K_x'' K_y'' K_z''}}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{(\xi^2+\eta^2+1)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{\xi^2}{K_x''}+\frac{\eta^2}{K_y''}+\frac{1}{K_z''}\right)^2}\, d\xi\, d\eta\, .$$

Andererseits ist das Oberflächendifferential des Ellipsoids

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

gleich

$$dS = \sqrt{1+\frac{c^4x^2}{a^4z^2}+\frac{c^4y^2}{b^4z^2}}\, dx\, dy\, .$$

Setzt man $x = tz$, $y = uz$, so wird

$$x = t\left(\frac{t^2}{a^2}+\frac{u^2}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$y = u\left(\frac{t^2}{a^2}+\frac{u^2}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

und

$$dS = \frac{\left(\frac{t^2}{a^4}+\frac{u^2}{b^4}+\frac{1}{c^4}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{t^2}{a^2}+\frac{u^2}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)^2}\, dt\, du\, ,$$

folglich die Oberfläche des Ellipsoides (das Integrationsgebiet in den neuen Variablen ist durch die unendlich ferne Gerade begrenzt)

$$S = 8\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\left(\frac{t^2}{a^4}+\frac{u^2}{b^4}+\frac{1}{c^4}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{t^2}{a^2}+\frac{u^2}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)^2}\, dt\, du\, .$$

Wird nun $t = \frac{a^2}{c^2}\xi$, $u = \frac{b^2}{c^2}\eta$ und hierauf $a^2 = \frac{f}{K_x''}$, $b^2 = \frac{f}{K_y''}$, $c^2 = \frac{f}{K_z''}$ gesetzt, wo f eine noch unbestimmte Konstante bezeichnet, so geht der letzte Ausdruck über in

$$S = \frac{8f}{K_x'' K_y'' K_z''} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{(\xi^2 + \eta^2 + 1)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{\xi^2}{K_x''} + \frac{\eta^2}{K_y''} + \frac{1}{K_z''}\right)^2} d\xi d\eta$$

und dies stimmt der Form nach mit (4) überein, aber auch dem Werte nach, wenn

$$\frac{f}{K_x'' K_y'' K_z''} = \frac{\omega}{\pi \sqrt{2\pi K_x'' K_y'' K_z''}}, \text{ also } f = \omega \sqrt{\frac{K_x'' K_y'' K_z''}{2\pi^3}}.$$

Darin bezeichnet ω die Längeneinheit. Das zugehörige Ellipsoid hat die Gleichung

$$K_x'' x^2 + K_y'' y^2 + K_z'' z^2 = \omega \sqrt{\frac{K_x'' K_y'' K_z''}{2\pi^3}},$$

ist also dem Ellipsoid der mittleren Fehler ähnlich (s. Gleichung (20), Art. 166). Der durchschnittliche Fehler ist also durch die Oberflächen-Maasszahl eines gewissen, dem Ellipsoid der mittleren Fehler ähnlichen Ellipsoides dargestellt.

186. Das Gesetz der Wahrscheinlichkeit eines Fehlers ϱ unabhängig von der Richtung ist (s. Gleichung (4), Art. 162)

$$\Phi_\varrho = \frac{\varrho^2}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{K_x'' K_y'' K_z''}} \tag{5}$$

$$\cdot \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} e^{-\frac{\varrho^2}{2}\left(\frac{\sin^2\Theta \cos^2\varphi}{K_x''} + \frac{\sin^2\Theta \sin^2\varphi}{K_y''} + \frac{\cos^2\Theta}{K_z''}\right)} \sin\Theta d\varphi d\Theta$$

und hängt von einem Integral ab, das nur mittelst Reihenentwicklung berechnet werden kann.

Ähnliches gilt von der Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler ϱ der Punktbestimmung, von seiner Richtung abgesehen, zwischen den Grenzen 0 und $\sigma\sqrt{K''}$ eingeschlossen sei; der bezügliche Ausdruck ist

$$\Theta\left(\sigma\sqrt{K''}\right) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{K_x'' K_y'' K_z''}} \tag{6}$$

$$\cdot \int_0^{\sigma\sqrt{K''}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} e^{-\frac{\varrho^2}{2}\left(\frac{\sin^2\Theta \cos^2\varphi}{K_x''} + \frac{\sin^2\Theta \sin^2\varphi}{K_y''} + \frac{\cos^2\Theta}{K_z''}\right)} \varrho^2 \sin\Theta d\varrho d\varphi d\Theta.$$

187. Daran schliesst sich der Begriff des wahrscheinlichen Fehlers $R = \sigma_1\sqrt{K''}$ als Wurzel der Gleichung

$$\Theta\left(\sigma\sqrt{K''}\right) = \frac{1}{2} \tag{7}$$

an, und zwar bedeutet R den Halbmesser derjenigen um den Fehlerursprung beschriebenen Kugel, für welche die äussere Wahrscheinlichkeit gleichkommt der inneren. Der Wert von R ist von dem Grössenverhältnis $K_x'' : K_y'' : K_z''$ abhängig und bewegt sich zwischen jenen Grenzen, welche linearen Fehlern einerseits (zwei der Werte K_x'', K_y'', K_z'' sind Null) und dem Falle $K_x'' = K_y'' = K_z''$ andererseits entsprechen, wo die Fehlerellipsoide in konzentrische Kugeln sich umwandeln. An der ersteren Grenze ist $\sigma_1 = 0{,}67449$, an der letzteren ergibt sich σ_1 aus der Gleichung

$$\frac{3\sqrt{3}}{(2\pi K'')^{\frac{3}{2}}}\int_0^{\sigma_1\sqrt{K''}}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} e^{-\frac{3}{2}\frac{\varrho^2}{K''}}\varrho^2 \sin\Theta d\varrho\, d\varphi\, d\Theta = \frac{1}{2},$$

welche aus (7) hervorgeht für $K_x'' = K_y'' = K_z'' = \frac{K''}{3}$. Die Ausführung der Integrationen in Bezug auf Θ und φ führt auf die einfachere Gleichung

$$\frac{12\pi\sqrt{3}}{(2\pi K'')^{\frac{3}{2}}}\int_0^{\sigma_1\sqrt{K''}} e^{-\frac{3}{2}\frac{\varrho^2}{K''}}\varrho^2 d\varrho = \frac{1}{2},$$

und diese verwandelt sich durch die Substitution $\varrho\sqrt{\frac{2K''}{3}} = t$ in

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sigma_1\sqrt{\frac{3}{2}}} e^{-t^2}dt - \sqrt{\frac{6}{\pi}}\,\sigma_1 e^{-\frac{3}{2}\sigma_1^2} = \frac{1}{2},$$

woraus mit Zuhilfenahme der Tafel I (am Ende des Buches)

$$\sigma_1 = 0{,}88807$$

gefunden wird. Es variiert also R zwischen den Grenzen $0{,}67449\sqrt{K''}$ und $0{,}88807\sqrt{K''}$.

188. Natürlicher als die Verfolgung von Punktlagen gleicher Entfernung vom Fehlerursprung ist das Verfahren, Punkte zusammenzufassen, welchen gleiche Wahrscheinlichkeit zukommt und dementsprechend den Raum statt durch Kugeln durch Fehlerellipsoide in Elemente zu zerlegen.

Heisst das Volumen des Ellipsoids (2), Art. 183, v, ist dv die Änderung, welche es bei dem Übergange von $\varkappa$ zu $\varkappa + d\varkappa$ erfährt, $\Phi_\varkappa$ der den Punkten dieses Ellipsoides zukommende Wert von Φ, so ist $\Phi_\varkappa dv$ die Wahrscheinlichkeit dass der Punkt in die Schale, welche durch die Ellipsoide $\varkappa^2$ und $(\varkappa + d\varkappa)^2$ begrenzt wird, zu liegen komme. Nun ist

$$v = \frac{4}{3}\pi\varkappa^3 \sqrt{8K_x'' K_y'' K_z''}, \tag{8}$$

folglich

$$dv = 4\pi\varkappa^2 d\varkappa \sqrt{8K_x'' K_y'' K_z''}$$

und

$$\Phi_\varkappa dv = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \varkappa^2 e^{-\varkappa^2} d\varkappa. \tag{9}$$

Daraus ergibt sich die innere Wahrscheinlichkeit für das in Rede stehende Ellipsoid

$$\Theta(\varkappa) = \int_{\varkappa=0}^{\varkappa=\varkappa} \Phi_\varkappa dv = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\varkappa e^{-\varkappa^2} d\varkappa - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \varkappa e^{-\varkappa^2}. \tag{10}$$

Einige Werte von $\Theta(\varkappa)$, das hier nicht wie in der Ebene eine einfache Rechnung gestattet, sind nachstehend zusammengestellt.

$\varkappa$	$\Theta(\varkappa)$	$\varkappa$	$\Theta(\varkappa)$
0,0	0,0000		
0,1	0,0014	1,2	0,7011
0,2	0,0107	1,4	0,8824
0,3	0,0344	1,6	0,9469
0,4	0,0767	1,8	0,9790
0,5	0,1384	2,0	0,9926
0,6	0,2181	2,2	0,9977
0,7	0,3108	2,4	0,9994
0,8	0,4108	2,6	0,9999
0,9	0,5119	2,8	0,9999
1,0	0,6084	3,0	0,9999.

Das wahrscheinliche Ellipsoid, d. i. dasjenige, für welches die äussere Wahrscheinlichkeit gleichkommt der innern, ist charakterisiert durch jenen Wert von $\varkappa$, welcher sich aus der Gleichung $\Theta(\varkappa) = \frac{1}{2}$ ergibt, nämlich $\varkappa = 0{,}88807$; seine Halbaxen sind demnach

$$
\begin{aligned}
& 0{,}88807 \sqrt{2 K_x''} = 1{,}2559 \sqrt{K_x''} \\
(11) \qquad & 0{,}88807 \sqrt{2 K_y''} = 1{,}2559 \sqrt{K_y''} \\
& 0{,}88807 \sqrt{2 K_z''} = 1{,}2559 \sqrt{K_z''};
\end{aligned}
$$

es wird aus dem mittleren Fehlerellipsoid durch lineare Vergrösserung in dem Verhältnisse 1 : 1,2559 erhalten.

189. Bravais führt in seine Untersuchungen dasjenige Ellipsoid, dessen Volumen gleich ist der Einheit, unter dem Namen Fundamentalellipsoid ein. Das zugehörige $\varkappa$ werde mit $\varkappa_1$ bezeichnet; aus Gleichung (8) des vorigen Artikels ergibt sich für dasselbe die Bestimmung

$$\varkappa_1^3 = \frac{3}{4\pi\sqrt{2 K_x'' K_y'' K_z''}},$$

wornach für (8) auch geschrieben werden kann

$$v = \frac{\varkappa^3}{\varkappa_1^3}.$$

Mittelst dieser Relationen erkennt man, dass für jeden Punkt des Ellipsoides (2), Art. 183,

$$\Phi_\varkappa = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \varkappa_1^3 e^{-\varkappa_1^2 v^{\frac{2}{3}}}.$$

Einer dieser Punkte habe den Leitstrahl ϱ, der zugeordnete Leitstrahl des Fundamentalellipsoides sei ϱ_1. Man denke sich einen Kegel mit unendlich kleiner Öffnung, dessen Spitze im Ursprung liegt und dessen Mantel durch jenen Punkt geht; dann ist das von dem Ellipsoid (2), Art. 183, begrenzte Volumen dieses Kegels $\frac{1}{3} q\varrho^3$, oder wegen $\varrho^3 = \varrho_1^3 v$ auch gleich $\frac{1}{3} q\varrho_1^3 v$ und sein Differential $\frac{1}{3} q\varrho_1^3 dv$. Integriert man das Produkt $\Phi_\varkappa \cdot \frac{1}{3} q\varrho_1^3 dv$ zwischen den Grenzen $v = 0$ und $v = \infty$, so erhält man die Wahrscheinlichkeit,

dass der Punkt in den ins Unendliche sich erstreckenden Raum des gedachten Kegels fallen werde; diese Wahrscheinlichkeit ist demnach

$$\frac{4}{9\sqrt{\pi}} q \varrho_1^3 \int_0^\infty \varkappa_1^3 e^{-\varkappa_1^2 v^{\frac{2}{3}}} dv = \frac{1}{3} q \varrho_1^3,$$

also gleich dem durch das Fundamentalellipsoid begrenzten Teil des Kegels.

Dieses Verhalten erstreckt sich naturgemäss auch auf Kegelräume von endlicher Öffnung. Man kann es auch in die Worte fassen, dass die Wahrscheinlichkeit des Abweichens in bestimmter Richtung proportional ist der dritten Potenz des zugehörigen Halbmessers des Fundamental- oder irgend eines festen Fehlerellipsoids.

190. Durch jeden Punkt des Raumes geht ein und nur ein Fehlerellipsoid, der ihm als charakteristische Zahl zugeordnete Wert von $\varkappa^2$ ergibt sich durch Einführung seiner Koordinaten in die Gleichung (2), Art. 183. Der Ausdruck $\frac{4}{\sqrt{\pi}} \varkappa^2 e^{-\varkappa^2} d\varkappa$, welcher in Gleichung (9), Art. 188, als Wahrscheinlichkeit dafür gefunden worden ist, dass der Punkt zwischen die Ellipsoide $\varkappa^2$ und $(\varkappa + d\varkappa)^2$ zu liegen kommen werde, ist zugleich Wahrscheinlichkeit dafür, der einem Punkte zugeordnete Wert von $\varkappa^2$ sei zwischen den Grenzen $\varkappa^2$ und $(\varkappa + d\varkappa)^2$ eingeschlossen. Hiernach ist der Mittelwert von $\varkappa^2$ gleich

$$\frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \varkappa^4 e^{-\varkappa^2} d\varkappa = \frac{3}{2}. \tag{14}$$

191. Nach diesen allgemeinen Erörterungen nehmen wir das Problem des Artikels 159 wieder auf, indem wir uns die Frage nach der zweckmässigsten Wahl der Multiplikatoren $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ stellen.

Zu diesem Ende setzen wir

$$\frac{a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy}{4R} = \varkappa^2; \tag{1}$$

die Wahrscheinlichkeit, dass der Punkt innerhalb des durch diese Gleichung dargestellten Ellipsoids enthalten sei, für

welche in Art. 188 der Ausdruck (10) gefunden worden ist, ist zugleich die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Fehler x, y, z in den Koordinaten der Punktbestimmung gleichzeitig zwischen jenen Grenzen eingeschlossen sein werden, welche sich aus der Gleichung (1) ergeben.

Um die äussersten Werte von x zu finden, verbinde man die Gleichung (1) mit den beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= 0 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= 0, \end{aligned} \tag{2}$$

welche aus (1) durch partielle Differentiation in Bezug auf y und z erhalten werden, und zwar in der Weise, dass man die erste mit y, die zweite mit z multipliziert und hierauf beide von (1) subtrahiert; daraus fliesst als dritte Gleichung

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = \frac{4\varkappa^2 R}{x}. \tag{3}$$

Durch Auflösung von (2) und (3) nach x ergibt sich zunächst

$$R^2 x = \frac{4\varkappa^2 R}{x} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

und da

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = R A_{11},$$

so sind die verlangten äussersten Werte von x:

$$x = \pm 2\varkappa \sqrt{A_{11}} = \pm 2\varkappa\chi \sqrt{[\alpha\alpha]} \tag{4}$$

und ebenso findet man als äusserste Werte von y und z:

$$y = \pm 2\varkappa \sqrt{A_{22}} = \pm 2\varkappa\chi \sqrt{[\beta\beta]} \tag{4*}$$

$$z = \pm 2\varkappa \sqrt{A_{33}} = \pm 2\varkappa\chi \sqrt{[\gamma\gamma]}. \tag{4**}$$

Es ist ganz naturgemäss, jene Systeme von Multiplikatoren als die vorteilhaftesten zu bezeichnen, für welche die Grenzen von x, y, z gleichzeitig möglichst eng ausfallen. Im Sinne dieser Festsetzung hat man also $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ so zu bestimmen, dass

$[\alpha\alpha]$ ein Minimum
$[\beta\beta]$ ein Minimum
$[\gamma\gamma]$ ein Minimum

werde unter gleichzeitiger Erfüllung der Bedingungen (s. die Gleichungen (2), Art. 159)

$$(5)\qquad \begin{array}{lll} [\alpha a] = 1, & [\alpha b] = 0, & [\alpha c] = 0 \\ [\beta a] = 0, & [\beta b] = 1, & [\beta c] = 0 \\ [\gamma a] = 0, & [\gamma b] = 0, & [\gamma c] = 1. \end{array}$$

Nach einem wiederholt befolgten Vorgange führt dies zu den Bestimmungen

$$(6)\qquad \begin{aligned} \alpha_i &= a_i q_{11} + b_i q_{12} + c_i q_{13} \\ \beta_i &= a_i q_{21} + b_i q_{22} + c_i q_{23} \\ \gamma_i &= a_i q_{31} + b_i q_{32} + c_i q_{33}, \end{aligned}$$

in welchen für die verschiedenen q_{ij} die aus folgenden Gleichungssystemen resultierenden Werte einzutragen sind:

$$(7)\qquad \begin{aligned} [aa]q_{11} + [ab]q_{12} + [ac]q_{13} &= 1 \\ [ba]q_{11} + [bb]q_{12} + [bc]q_{13} &= 0 \\ [ca]q_{11} + [cb]q_{12} + [cc]q_{13} &= 0 \\[1ex] [aa]q_{21} + [ab]q_{22} + [ac]q_{23} &= 0 \\ [ba]q_{21} + [bb]q_{22} + [bc]q_{23} &= 1 \\ [ca]q_{21} + [cb]q_{22} + [cc]q_{23} &= 0 \\[1ex] [aa]q_{31} + [ab]q_{32} + [ac]q_{33} &= 0 \\ [ba]q_{31} + [bb]q_{32} + [bc]q_{33} &= 0 \\ [ca]q_{31} + [cb]q_{32} + [cc]q_{33} &= 1. \end{aligned}$$

Hiermit ergibt sich auf Grund der Gleichungen (4), Art. 159, die vorteilhafteste Bestimmung der Koordinaten des Punktes

$$(8)\qquad \begin{aligned} X_0 &= [a(l + k')]q_{11} + [b(l + k')]q_{12} + [c(l + k')]q_{13} \\ Y_0 &= [a(l + k')]q_{21} + [b(l + k')]q_{22} + [c(l + k')]q_{23} \\ Z_0 &= [a(l + k')]q_{31} + [b(l + k')]q_{32} + [c(l + k')]q_{33}, \end{aligned}$$

welche aber zusammenfällt mit der Lösung des Gleichungssystems

$$(9)\qquad \begin{aligned} [aa]X_0 + [ab]Y_0 + [ac]Z_0 &= [a(l + k')] \\ [ba]X_0 + [bb]Y_0 + [bc]Z_0 &= [b(l + k')] \\ [ca]X_0 + [cb]Y_0 + [cc]Z_0 &= [c(l + k')]. \end{aligned}$$

Die vorteilhafteste Bestimmung der Unbekannten ist also auch unter diesem Gesichtspunkte diejenige, welche sich nach der Methode der kleinsten Quadrate ergibt.

Setzt man

$$\begin{vmatrix} [aa] & [ab] & [ac] \\ [ba] & [bb] & [bc] \\ [ca] & [cb] & [cc] \end{vmatrix} = \Delta$$

und bezeichnet das adjungierte System mit

$$\begin{matrix} A_{aa} & A_{ab} & A_{ac} \\ A_{ba} & A_{bb} & A_{bc} \\ A_{ca} & A_{cb} & A_{cc}, \end{matrix}$$

so folgt aus (6) und (7) mit Berücksichtigung von (5)

$$[\alpha\alpha] = \frac{A_{aa}}{\Delta}, \quad [\alpha\beta] = \frac{A_{ab}}{\Delta}, \quad [\alpha\gamma] = \frac{A_{ac}}{\Delta}$$

$$[\beta\alpha] = \frac{A_{ba}}{\Delta}, \quad [\beta\beta] = \frac{A_{bb}}{\Delta}, \quad [\beta\gamma] = \frac{A_{bc}}{\Delta}$$

$$[\gamma\alpha] = \frac{A_{ca}}{\Delta}, \quad [\gamma\beta] = \frac{A_{cb}}{\Delta}, \quad [\gamma\gamma] = \frac{A_{cc}}{\Delta};$$

mithin ist (s. die Gleichungen (7), Art. 159)

$$R = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = \frac{\chi^6}{\Delta^3} \begin{vmatrix} A_{aa} & A_{ab} & A_{ac} \\ A_{ba} & A_{bb} & A_{bc} \\ A_{ca} & A_{cb} & A_{cc} \end{vmatrix} = \frac{\chi^6}{\Delta},$$

$$a_{11} = \begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = \frac{\chi^4}{\Delta^2} \begin{vmatrix} A_{bb} & A_{bc} \\ A_{cb} & A_{cc} \end{vmatrix} = \frac{\chi^4 [aa]}{\Delta},$$

$$a_{12} = \begin{vmatrix} A_{23} & A_{21} \\ A_{33} & A_{31} \end{vmatrix} = \frac{\chi^4}{\Delta^2} \begin{vmatrix} A_{bc} & A_{ba} \\ A_{cc} & A_{ca} \end{vmatrix} = \frac{\chi^4 [ab]}{\Delta},$$

u. s. w., so dass sich für die Wahrscheinlichkeit p (s. Gleichung (8), Art. 159)

$$(10)\quad p = \frac{\sqrt{\Delta}}{8\pi^{\frac{3}{2}}\chi^3} e^{-\frac{[aa]x^2 + [bb]y^2 + [cc]z^2 + 2[bc]yz + 2[ca]zx + 2[ab]xy}{4\chi^2}} dx\,dy\,dz$$

als endgiltiger Ausdruck ergibt, in welchem nur noch die Koeffizienten der Fehlergleichungen (1), Art. 159, neben der von der Genauigkeit der Beobachtungen abhängigen Grösse χ erscheinen.

Der Exponent von e ist aber die Entwicklung von

$$-\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{a_i x + b_i y + c_i z}{2\chi}\right)^2,$$

und bezeichnet man die Determinante der quadratischen Form

$$\sum\left(\frac{a_i x + b_i y + c_i z}{\chi}\right)^2$$

mit R', so lässt sich (10) auch in der Gestalt

$$p = \frac{\sqrt{R'}}{(2\sqrt{\pi})^3}\, e^{-\Sigma\left(\frac{a_i x + b_i y + c_i z}{2\chi}\right)^2}\, dx\, dy\, dz$$

schreiben. Dies stimmt mit einem an früherer Stelle (Art. 122) erwähnten und nachgewiesenen Laplace'schen Resultat überein.

Tafel I.

Werte der Funktion $\Theta(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2}\, dt.$

t	$\Theta(t)$	Diff.	t	$\Theta(t)$	Diff.	t	$\Theta(t)$	Diff.
0,00	0,00000 00	1128 33	0,40	0,42839 22	957 68	0,80	0,74210 10	590 23
0,01	0,01128 33	1128 11	0,41	0,43796 90	949 86	0,81	0,74800 33	580 75
0,02	0,02256 44	1127 66	0,42	0,44746 76	941 91	0,82	0,75381 08	571 30
0,03	0,03384 10	1126 99	0,43	0,45688 67	933 84	0,83	0,75952 38	561 89
0,04	0,04511 09	1126 09	0,44	0,46622 51	925 67	0,84	0,76514 27	552 53
0,05	0,05637 18	1124 97	0,45	0,47548 18	917 37	0,85	0,77066 80	543 22
0,06	0,06762 15	1123 62	0,46	0,48465 55	908 97	0,86	0,77610 22	533 96
0,07	0,07885 77	1122 04	0,47	0,49374 52	900 46	0,87	0,78143 98	524 75
0,08	0,09007 81	1120 25	0,48	0,50274 98	891 85	0,88	0,78668 73	515 59
0,09	0,10128 06	1118 24	0,49	0,51166 83	883 16	0,89	0,79184 32	506 50
0,10	0,11246 30	1116 00	0,50	0,52049 99	874 38	0,90	0,79690 82	497 46
0,11	0,12362 30	1113 54	0,51	0,52924 37	865 50	0,91	0,80188 28	488 49
0,12	0,13475 84	1110 87	0,52	0,53789 87	856 54	0,92	0,80676 77	479 58
0,13	0,14586 71	1107 99	0,53	0,54646 41	847 51	0,93	0,81156 35	470 75
0,14	0,15694 70	1104 89	0,54	0,55493 92	838 41	0,94	0,81627 10	461 98
0,15	0,16799 59	1101 58	0,55	0,56332 33	829 24	0,95	0,82089 08	453 28
0,16	0,17901 17	1098 06	0,56	0,57161 57	820 01	0,96	0,82542 36	444 67
0,17	0,18999 23	1094 34	0,57	0,57981 58	810 71	0,97	0,82987 03	436 12
0,18	0,20093 57	1090 41	0,58	0,58792 29	801 36	0,98	0,83423 15	427 66
0,19	0,21183 98	1086 27	0,59	0,59593 65	791 96	0,99	0,83850 81	419 27
0,20	0,22270 25	1081 93	0,60	0,60385 61	782 51	1,00	0,84270 08	410 97
0,21	0,23352 18	1077 40	0,61	0,61168 12	773 02	1,01	0,84681 05	402 75
0,22	0,24429 58	1072 67	0,62	0,61941 14	763 49	1,02	0,85083 80	394 62
0,23	0,25502 25	1067 75	0,63	0,62704 63	753 94	1,03	0,85478 42	386 57
0,24	0,26570 00	1062 63	0,64	0,63458 57	744 35	1,04	0,85864 99	378 61
0,25	0,27632 63	1057 34	0,65	0,64202 92	734 73	1,05	0,86243 60	370 75
0,26	0,28689 97	1051 85	0,66	0,64937 65	725 10	1,06	0,86614 35	362 97
0,27	0,29741 82	1046 18	0,67	0,65662 75	715 45	1,07	0,86977 32	355 29
0,28	0,30788 00	1040 34	0,68	0,66378 20	705 79	1,08	0,87332 61	347 69
0,29	0,31828 34	1034 33	0,69	0,67083 99	696 11	1,09	0,87680 30	340 20
0,30	0,32862 67	1028 14	0,70	0,67780 10	686 44	1,10	0,88020 50	332 80
0,31	0,33890 81	1021 78	0,71	0,68466 54	676 76	1,11	0,88353 30	325 49
0,32	0,34912 59	1015 26	0,72	0,69143 30	667 08	1,12	0,88678 79	318 28
0,33	0,35927 85	1008 59	0,73	0,69810 38	657 42	1,13	0,88997 07	311 16
0,34	0,36936 44	1001 75	0,74	0,70467 80	647 76	1,14	0,89308 23	304 15
0,35	0,37938 19	994 77	0,75	0,71115 56	638 11	1,15	0,89612 38	297 24
0,36	0,38932 96	987 63	0,76	0,71753 67	628 49	1,16	0,89909 62	290 42
0,37	0,39920 59	980 34	0,77	0,72382 16	618 88	1,17	0,90200 04	283 70
0,38	0,40900 93	972 92	0,78	0,73001 04	609 31	1,18	0,90483 74	277 09
0,39	0,41873 85	965 37	0,79	0,73610 35	599 75	1,19	0,90760 83	270 57

t	$\Theta(t)$	Diff.	t	$\Theta(t)$	Diff.	t	$\Theta(t)$	Diff.
1,20	0,91031 40	264 15	1,70	0,98379 04	61 66	2,20	0,99813 72	8 72
1,21	0,91295 55	257 84	1,71	0,98440 70	59 58	2,21	0,99822 44	8 35
1,22	0,91553 39	251 62	1,72	0,98500 28	57 57	2,22	0,99830 79	7 99
1,23	0,91805 01	245 51	1,73	0,98557 85	55 61	2,23	0,99838 78	7 64
1,24	0,92050 52	239 49	1,74	0,98613 46	53 71	2,24	0,99846 42	7 31
1,25	0,92290 01	233 58	1,75	0,98667 17	51 86	2,25	0,99853 73	6 98
1,26	0,92523 59	227 77	1,76	0,98719 03	50 07	2,26	0,99860 71	6 68
1,27	0,92751 36	222 06	1,77	0,98769 10	48 32	2,27	0,99867 39	6 38
1,28	0,92973 42	216 45	1,78	0,98817 42	46 64	2,28	0,99873 77	6 09
1,29	0,93189 87	210 93	1,79	0,98864 06	44 99	2,29	0,99879 86	5 82
1,30	0,93400 80	205 52	1,80	0,98909 05	43 40	2,30	0,99885 68	5 56
1,31	0,93606 32	200 20	1,81	0,98952 45	41 86	2,31	0,99891 24	5 31
1,32	0,93806 52	194 98	1,82	0,98994 31	40 36	2,32	0,99896 55	5 07
1,33	0,94001 50	189 87	1,83	0,99034 67	38 92	2,33	0,99901 62	4 84
1,34	0,94191 37	184 85	1,84	0,99073 59	37 51	2,34	0,99906 46	4 61
1,35	0,94376 22	179 92	1,85	0,99111 10	36 15	2,35	0,99911 07	4 41
1,36	0,94556 14	175 10	1,86	0,99147 25	34 82	2,36	0,99915 48	4 20
1,37	0,94731 24	170 36	1,87	0,99182 07	33 55	2,37	0,99919 68	4 01
1,38	0,94901 60	165 73	1,88	0,99215 62	32 31	2,38	0,99923 69	3 82
1,39	0,95067 33	161 18	1,89	0,99247 93	31 11	2,39	0,99927 51	3 64
1,40	0,95228 51	156 73	1,90	0,99279 04	29 95	2,40	0,99931 15	3 47
1,41	0,95385 24	152 38	1,91	0,99308 99	28 83	2,41	0,99934 62	3 31
1,42	0,95537 62	148 11	1,92	0,99337 82	27 75	2,42	0,99937 93	3 15
1,43	0,95685 73	143 93	1,93	0,99365 57	26 69	2,43	0,99941 08	3 00
1,44	0,95829 66	139 84	1,94	0,99392 26	25 68	2,44	0,99944 08	2 86
1,45	0,95969 50	135 85	1,95	0,99417 94	24 69	2,45	0,99946 94	2 72
1,46	0,96105 35	131 94	1,96	0,99442 63	23 74	2,46	0,99949 66	2 60
1,47	0,96237 29	128 12	1,97	0,99466 37	22 83	2,47	0,99952 26	2 46
1,48	0,96365 41	124 38	1,98	0,99489 20	21 94	2,48	0,99954 72	2 35
1,49	0,96489 79	120 73	1,99	0,99511 14	21 09	2,49	0,99957 07	2 23
1,50	0,96610 52	117 16	2,00	0,99532 23	20 25	2,50	0,99959 30	2 13
1,51	0,96727 68	113 67	2,01	0,99552 48	19 47	2,51	0,99961 43	2 02
1,52	0,96841 35	110 27	2,02	0,99571 95	18 68	2,52	0,99963 45	1 92
1,53	0,96951 62	106 95	2,03	0,99590 63	17 95	2,53	0,99965 37	1 83
1,54	0,97058 57	103 70	2,04	0,99608 58	17 33	2,54	0,99967 20	1 73
1,55	0,97162 27	100 54	2,05	0,99625 81	16 54	2,55	0,99968 93	1 65
1,56	0,97262 81	97 45	2,06	0,99642 35	15 87	2,56	0,99970 58	1 57
1,57	0,97360 26	94 44	2,07	0,99658 22	15 22	2,57	0,99972 15	1 49
1,58	0,97454 70	91 50	2,08	0,99673 44	14 61	2,58	0,99973 64	1 41
1,59	0,97546 20	88 64	2,09	0,99688 05	14 00	2,59	0,99975 05	1 35
1,60	0,97634 84	85 85	2,10	0,99702 05	13 43	2,60	0,99976 40	1 27
1,61	0,97720 69	83 12	2,11	0,99715 48	12 88	2,61	0,99977 67	1 21
1,62	0,97803 81	80 48	2,12	0,99728 36	12 34	2,62	0,99978 88	1 15
1,63	0,97884 29	77 89	2,13	0,99740 70	11 83	2,63	0,99980 03	1 09
1,64	0,97962 18	75 38	2,14	0,99752 53	11 33	2,64	0,99981 12	1 03
1,65	0,98037 56	72 93	2,15	0,99763 86	10 86	2,65	0,99982 15	98
1,66	0,98110 49	70 55	2,16	0,99774 72	10 39	2,66	0,99983 13	93
1,67	0,98181 04	68 24	2,17	0,99785 11	9 94	2,67	0,99984 06	88
1,68	0,98249 28	65 98	2,18	0,99795 05	9 54	2,68	0,99984 94	84
1,69	0,98315 26	63 78	2,19	0,99804 59	9 13	2,69	0,99985 78	79

t	$\Theta(t)$	Diff.	t	$\Theta(t)$	Diff.	t	$\Theta(t)$
2,70	0,99986 57	75	3,15	0,99999 16	5	3,60	0,999999 64414
2,71	0,99987 32	71	3,16	0,99999 21	5	3,61	0,999999 66975
2,72	0,99988 03	67	3,17	0,99999 26	5	3,62	0,999999 69358
2,73	0,99988 70	63	3,18	0,99999 31	5	3,63	0,999999 71574
2,74	0,99989 33	61	3,19	0,99999 36	4	3,64	0,999999 73636
2,75	0,99989 94	57	3,20	0,99999 40	4	3,65	0,999999 75551
2,76	0,99990 51	54	3,21	0,99999 44	3	3,66	0,999999 77333
2,77	0,99991 05	51	3,22	0,99999 47	4	3,67	0,999999 78990
2,78	0,99991 56	48	3,23	0,99999 51	3	3,68	0,999999 80528
2,79	0,99992 04	46	3,24	0,99999 54	3	3,69	0,999999 81957
2,80	0,99992 50	43	3,25	0,99999 57	3	3,70	0,999999 83285
2,81	0,99992 93	41	3,26	0,99999 60	2	3,71	0,999999 84517
2,82	0,99993 34	38	3,27	0,99999 62	3	3,72	0,999999 85663
2,83	0,99993 72	37	3,28	0,99999 65	2	3,73	0,999999 86726
2,84	0,99994 09	34	3,29	0,99999 67	2	3,74	0,999999 87712
2,85	0,99994 43	33	3,30	0,99999 69	2	3,75	0,999999 88629
2,86	0,99994 76	31	3,31	0,99999 71	2	3,76	0,999999 89477
2,87	0,99995 07	29	3,32	0,99999 73	2	3,77	0,999999 90265
2,88	0,99995 36	27	3,33	0,99999 75	2	3,78	0,999999 90995
2,89	0,99995 63	26	3,34	0,99999 77	1	3,79	0,999999 91672
2,90	0,99995 89	24	3,35	0,99999 78	2	3,80	0,999999 92300
2,91	0,99996 13	23	3,36	0,99999 80	1	3,81	0,999999 92881
2,92	0,99996 36	22	3,37	0,99999 81	1	3,82	0,999999 93421
2,93	0,99996 58	21	3,38	0,99999 82	2	3,83	0,999999 93921
2,94	0,99996 79	19	3,39	0,99999 84	1	3,84	0,999999 94383
2,95	0,99996 98	18	3,40	0,99999 85	1	3,85	0,999999 94812
2,96	0,99997 16	17	3,41	0,99999 86	1	3,86	0,999999 95208
2,97	0,99997 33	17	3,42	0,99999 87	1	3,87	0,999999 95575
2,98	0,99997 50	15	3,43	0,99999 88	1	3,88	0,999999 95915
2,99	0,99997 65	14	3,44	0,99999 89	0	3,89	0,999999 96230
3,00	0,99997 79	14	3,45	0,99999 89		3,90	0,999999 96521
3,01	0,99997 93	12	3,46	0,999999 00780		3,91	0,999999 96790
3,02	0,99998 05	12	3,47	0,999999 07672		3,92	0,999999 97039
3,03	0,99998 17	12	3,48	0,999999 14101		3,93	0,999999 97260
3,04	0,99998 29	10	3,49	0,999999 20097		3,94	0,999999 97482
3,05	0,99998 39	10	3,50	0,999999 25691		3,95	0,999999 97678
3,06	0,99998 49	10	3,51	0,999999 30905		3,96	0,999999 97860
3,07	0,99998 59	8	3,52	0,999999 35766		3,97	0,999999 98028
3,08	0,99998 67	9	3,53	0,999999 40296		3,98	0,999999 98183
3,09	0,99998 76	8	3,54	0,999999 44519		3,99	0,999999 98327
3,10	0,99998 84	7	3,55	0,999999 48452		4,00	0,999999 98458
3,11	0,99998 91	7	3,56	0,999999 52115		4,10	0,999999 99330
3,12	0,99998 98	6	3,57	0,999999 55527		4,20	0,999999 99714
3,13	0,99999 04	6	3,58	0,999999 58703		4,30	0,999999 99881
3,14	0,99999 10	6	3,59	0,999999 61661		4,40	0,999999 99951
						4,50	0,999999 99980
						4,60	0,999999 99992
						4,70	0 999999 99997
						4,80	0,999999 99999

Tafel II.

Werte der Funktion $\Theta\left(\varrho \frac{t}{r}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\varrho \frac{t}{r}} e^{-t^2}\, dt,$

geordnet nach dem Argument $\frac{t}{r}$.

$\frac{t}{r}$	$\Theta\left(\varrho \frac{t}{r}\right)$	Diff.	$\frac{t}{r}$	$\Theta\left(\varrho \frac{t}{r}\right)$	Diff.	$\frac{t}{r}$	$\Theta\left(\varrho \frac{t}{r}\right)$	Diff.
0,00	0,00000	538	0,40	0,21268	519	0,80	0,41052	465
0,01	0,00538	538	0,41	0,21787	517	0,81	0,41517	462
0,02	0,01076	538	0,42	0,22304	517	0,82	0,41979	461
0,03	0,01614	538	0,43	0,22821	515	0,83	0,42440	459
0,04	0,02152	538	0,44	0,23336	515	0,84	0,42899	458
0,05	0,02690	538	0,45	0,23851	513	0,85	0,43357	456
0,06	0,03228	538	0,46	0,24364	512	0,86	0,43813	454
0,07	0,03766	537	0,47	0,24876	512	0,87	0,44267	452
0,08	0,04303	537	0,48	0,25388	510	0,88	0,44719	450
0,09	0,04840	538	0,49	0,25898	509	0,89	0,45169	449
0,10	0,05378	536	0,50	0,26407	508	0,90	0,45618	446
0,11	0,05914	537	0,51	0,26915	506	0,91	0,46064	445
0,12	0,06451	536	0,52	0,27421	506	0,92	0,46509	443
0,13	0,06987	536	0,53	0,27927	504	0,93	0,46952	441
0,14	0,07523	536	0,54	0,28431	503	0,94	0,47393	439
0,15	0,08059	535	0,55	0,28934	502	0,95	0,47832	438
0,16	0,08594	535	0,56	0,29436	500	0 96	0,48270	435
0,17	0,09129	534	0,57	0,29936	499	0,97	0,48605	434
0,18	0,09663	534	0,58	0,30435	498	0,98	0,49139	431
0,19	0,10197	534	0,59	0,30933	497	0,99	0,49570	430
0,20	0,10731	533	0,60	0,31430	495	1,00	0,50000	428
0,21	0,11264	532	0,61	0,31925	494	1,01	0,50428	425
0,22	0,11796	532	0,62	0,32419	492	1,02	0,50853	424
0,23	0,12328	532	0,63	0,32911	491	1,03	0,51277	422
0,24	0,12860	531	0,64	0 33402	490	1,04	0,51699	420
0,25	0,13391	530	0,65	0,33892	488	1,05	0,52119	418
0,26	0,13921	530	0,66	0,34380	486	1,06	0,52537	415
0,27	0,14451	529	0,67	0,34866	486	1,07	0,52952	414
0,28	0,14980	528	0,68	0,35352	483	1,08	0,53366	412
0,29	0,15508	527	0,69	0,35835	482	1,09	0,53778	410
0,30	0,16035	527	0,70	0,36317	481	1,10	0,54188	407
0,31	0,16562	526	0,71	0,36798	479	1,11	0,54595	406
0,32	0,17088	526	0,72	0,37277	478	1,12	0,55001	403
0,33	0,17614	524	0,73	0,37755	476	1,13	0,55404	402
0,34	0,18138	524	0,74	0,38231	474	1,14	0,55806	399
0,35	0,18662	523	0,75	0,38705	473	1,15	0,56205	397
0,36	0,19185	522	0,76	0,39178	471	1,16	0,56602	396
0,37	0,19707	522	0,77	0,39649	469	1,17	0,56998	393
0,38	0,20229	520	0,78	0,40118	468	1,18	0,57391	391
0,39	0,20749	519	0,79	0,40586	466	1,19	0,57782	389

$\frac{t}{r}$	$\Theta\left(\varrho\frac{t}{r}\right)$	Diff.	$\frac{t}{r}$	$\Theta\left(\varrho\frac{t}{r}\right)$	Diff.	$\frac{t}{r}$	$\Theta\left(\varrho\frac{t}{r}\right)$	Diff.
1,20	0,58171	387	1,70	0,74847	277	2,20	0,86216	178
1,21	0,58558	384	1,71	0,75124	276	2,21	0,86394	176
1,22	0,58942	383	1,72	0,75400	274	2,22	0,86570	175
1,23	0,59325	380	1,73	0,75674	271	2,23	0,86745	172
1,24	0,59705	378	1,74	0,75945	269	2,24	0,86917	171
1,25	0,60083	377	1,75	0,76214	267	2,25	0,87088	170
1,26	0,60460	373	1,76	0,76481	265	2.26	0,87258	167
1,27	0,60833	372	1,77	0,76746	263	2,27	0,87425	166
1,28	0,61205	370	1,78	0,77009	261	2,28	0,87591	164
1,29	0,61575	367	1,79	0,77270	258	2,29	0,87755	163
1,30	0,61942	366	1,80	0,77528	257	2,30	0,87918	160
1,31	0,62308	363	1,81	0,77785	254	2,31	0,88078	159
1,32	0,62671	361	1,82	0,78039	252	2,32	0,88237	158
1,33	0,63032	359	1,83	0,78291	251	2,33	0,88395	155
1,34	0,63391	356	1,84	0,78542	248	2,34	0,88550	155
1,35	0,63747	355	1,85	0,78790	246	2,35	0,88705	152
1,36	0,64102	352	1,86	0,79036	244	2,36	0,88857	151
1,37	0,64454	350	1,87	0,79280	242	2,37	0,89008	149
1,38	0,64804	348	1,88	0,79522	239	2,38	0,89157	147
1,39	0,65152	346	1,89	0,79761	238	2,39	0,89304	146
1,40	0,65498	343	1,90	0,79999	236	2,40	0,89450	145
1,41	0,65841	341	1,91	0,80235	234	2,41	0,89595	143
1,42	0,66182	339	1,92	0,80469	231	2,42	0,89738	141
1,43	0,66521	337	1,93	0,80700	230	2,43	0,89879	140
1,44	0,66858	335	1,94	0,80930	228	2,44	0,90019	138
1,45	0,67193	333	1,95	0,81158	225	2,45	0,90157	136
1,46	0,67526	330	1,96	0,81383	224	2,46	0,90293	135
1,47	0,67856	328	1,97	0,81607	221	2,47	0,90428	134
1,48	0,68184	326	1,98	0,81828	220	2,48	0,90562	132
1,49	0,68510	323	1,99	0,82048	218	2,49	0,90694	131
1,50	0,68833	322	2,00	0,82261	215	2,50	0,90825	129
1,51	0,69155	319	2,01	0,82481	214	2,51	0,90954	128
1,52	0,69474	317	2,02	0,82695	212	2,52	0,91082	126
1,53	0,69791	315	2.03	0,82907	210	2,53	0,91208	124
1,54	0,70106	313	2,04	0,83117	207	2,54	0,91332	124
1,55	0,70419	310	2,05	0,83324	206	2,55	0,91456	122
1,56	0,70729	309	2,06	0,83530	204	2,56	0,91578	120
1,57	0,71038	306	2,07	0,83734	202	2,57	0,91698	119
1,58	0,71344	304	2,08	0,83936	201	2,58	0,91817	118
1,59	0,71648	301	2,09	0,84137	198	2,59	0,91935	116
1,60	0,71949	300	2,10	0,84330	196	2,60	0,92051	115
1,61	0,72249	297	2,11	0,84531	195	2,61	0,92166	114
1,62	0,72546	295	2,12	0,84726	193	2,62	0,92280	112
1,63	0,72841	293	2,13	0,84919	190	2,63	0,92392	111
1,64	0,73134	291	2,14	0,85109	189	2,64	0,92503	110
1,65	0,73425	289	2,15	0,85298	188	2,65	0,92613	108
1,66	0,73714	286	2,16	0,85486	185	2,66	0,92721	107
1,67	0,74000	285	2,17	0,85671	183	2,67	0,92828	106
1,68	0,74285	282	2,18	0,85854	182	2,68	0,92934	104
1,69	0,74567	280	2,19	0,86036	180	2,69	0,93038	103

Namen-Register.

(Die Zahlen beziehen sich auf die Seiten.)

Berichtigungen.

pag. 240, 3. Z. v. u. anstatt innerhalb lies ausserhalb.

„ 311, 7. Z. v. o. „ $\frac{B_i}{p_i}\frac{\partial k_1}{\partial \varepsilon_i}$ „ $\frac{B_i}{p_i}\frac{\partial k_2}{\partial \varepsilon}$.

